Zadania z Zeszytu...

24.02.2009

1. Dany jest trójkąt ostrokąt ostrokątny ABC. Niech o_1 i o_2 będą odpowiednio okręgami o średnicach AB i AC. Wysokość trójkąta ABC poprowadzona z wierzchołka B przecina okrąg o_2 w punktach P i Q, zaś wysokość trójkąta ABC poprowadzona z wierzchołka C przecina okrąg o_1 w punktach M i N. Dowieść, że punkty M, N, P, Q leżą na jednym okręgu o środku w punkcie A.

2. Obliczyć sumę:
$$\frac{1 \cdot 2!}{2} + \frac{2 \cdot 3!}{2^2} + \frac{3 \cdot 4!}{2^3} + \cdots \frac{n \cdot (n+1)!}{2^n}$$

3. Liczby $a_1, a_2, \cdots, a_n$ $b_1, b_2, \cdots, b_n$ są dodatnie i spełniaja warunek:
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} b_k$$
Udowodnić, że:
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{{a_k}^2}{a_k + b_k} \geqslant \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$$

4. Danych jest $2n$ punktów leżących na okręgu. Niech T_n oznacza liczbę sposobów na ile można te punkty połaczyć n odcinkami tak, aby żadne dwa nie miały punktów wspólnych. Przyjmujemy $T_0 = 1$. Udowodnić:
$$T_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} T_k \cdot T_{n-k}$$

5. W Warszawie żyje 12 samotnych matexów. Każdy z nich ma własne mieszkanie w innej dzielnicy Warszawy. Ludzie z matexu mają mało wyobraźni, więc ich mieszkania są albo całe białe, albo całe zielone. Pomiędzy niektórymi sposród nich zawiązaly sie przyjaźnie. Ponieważ samotne matexy nie chcą być samotne więc wymyśliły następujący pomysł: Każdy miesiąc jest przypisany do jednego spośród nich. Każdy matex w 'swoim' miesiącu zaprasza do swojego mieszkania swoich przyjaciół. Wtedy rozpoczyna się impreza, która trwa aż do końca miesiąca (wspaniała perspektywa). Na koniec imprezy właściciel mieszkania zmienia kolor ścian jeżeli ponad połowa jego przyjaciół ma inny kolor ścian niż on. Udowodnić, że w pewnym momencie nikt już nie będzie mógl przemalować swoich ścian.

6. Okrąg S_1 jest styczny do boków kąta ABC w punktach A i C. Okrąg S_2 jest styczny do prostej AC w punkcie C i przechodzi przez punkt B. Okrąg S_2 przecina okrąg S_1 w punkcie M róznym od C. Udowodnić, że AM połowi odcinek BC.

7. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele trójek naturalnych liczb m, n, k takich, że $m^2n^2 + m^2 + n^2 = k^2$