Szkolna Liga Zadaniowa

Seria VII

1. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n < 2501$, dla których $2501 \mid n^{11} - 2$.
2. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC = BC$. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC, przy czym $\angle PAB = \angle PBC$. M jest środkiem boku AB. Dowieść, że $\angle APM + \angle BPC = \pi$.
3. Znaleźć największą liczbę naturalną n, dla której istnieje n nieujemnych liczb całkowitych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, nie wszystkich równych zeru, takich, że dla dowolnego ciągu $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$ liczb ze zbioru $\{-1, 0, 1\}$, nie wszystkich równych zeru, n^3 nie dzieli $\epsilon_1 x_1 + \epsilon_2 x_2 + \ldots + \epsilon_n x_n$.
4. Znaleźć wszystkie wielomiany $P(x)$ takie, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi
$$(x-1)P(x+1) = (x+2)P(x)$$
5. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\angle C = \pi/2$. Niech M będzie środkiem przeciwprostokątnej AB, H spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka C, a P punktem wewnątrz trójkąta takim, że $AP = AC$. Udowodnić, że PM jest dwusieczną kąta $\angle BPH$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\angle A = \pi/3$
6. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n, dla których istnieje $k \geqslant 2$ dodatnich liczb wymiernych $a_1, a_2, \ldots, a_k$ takich, że $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = a_1 \cdot a_2 \cdots a_k = n$.
7. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi:
$$1 + \frac{3}{ab+bc+ca} \geqslant \frac{6}{a+b+c}$$
8. Dane są dwa rozłączne zbiory $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$, których sumą jest $\mathbb{N}$. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej n istnieją takie liczby a i b większe od n, że $\{a, b, a+b\}$ jest zawarte $\mathbb{A}$ lub zawarte w $\mathbb{B}$.
9. Niech liczby naturalne m i n będą takie, że $NWW(m,n) + NWD(m,n) = m + n$. Udowodnić, że jedna z tych liczb dzieli drugą.
10. W przestrzeni dane są punkty A, B, C, D spełniające zależność
$$\angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = \angle DAB = \pi/2$$
Udowodnić, że A, B, C, D są współpłaszczyznowe.