Różności

wtorek, 4 listopada 2008

1. Dany jest 101-elementowy zbiór liczb całkowitych. Udowodnić, że suma pewnego niepustego podzbioru jest podzielna przez 101.

2. funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła i spełnia równanie funkcyjne:
   $f\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{f(x)-f(y)}$ dla $x \neq y$
   Wyznaczyć tę funkcję.

3. S jest środkiem okręgu wpisanego w trójkat ABC, T jest środkiem okręgu dopisanego do tego trójkąta, stycznego do boku AC, P jest środkiem odcinka ST. Wykazać, że na czworokącie ABCP można opisać okrąg.

4. Na każdym polu nieskończonej szachownicy napisano liczbę całkowitą, przy czym kaźda napisana liczba występuje na tej szachownicy tylko raz. Dowieść, ze dla dowolnej liczby rzeczywistej a istnieją takie dwa sąsiednie pola szachownicy, źe różnica liczb napisanych na tych polach jest większa niz a.

5. Udowodnij, ze równanie diofantyczne
   $x^4 + y^4 = z^2$
   nie ma rozwiązań różnych od zera.

6. Dany jest trójkąt równoboczny pomalowany dwoma kolorami. Udowodnić, że da się w ten trójkąt wpisać trójkąt prostokątny o wierzchołkach w tym samym kolorze.

7. Udowodnić, że $2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1$ ma przynajmniej n czynników pierwszych

8. a, b całkowite dodatnie, $ab+1$ dzieli a^2+b^2. Dowieść, ze $(a^2+b^2)/(ab+1)$ jest kwadratem liczby całkowitej.