# Zadania z IMO i inne :-)

wtorek, 25 listopada 2008

1. Udowodnij, że dla liczby pierwszej p istnieje dzielnik pierwszy $q$ liczby $\frac{p^p-1}{p-1}$, taki że nie ma takiego $n \in \mathbb{N}$, żeby zachodziło $n^p \equiv p(modq)$

2. Ciąg $a_0, a_1, a_2, \cdots$ zdefiniowany jest następująco: $a_0 = 2, a_{k+1} = 2a_k^2 - 1$. Udowodnij, że jeśli istnieje nieparzysty dzielnik pierwszy $p$, przystający do 1 lub 11 modulo 12, liczby $a_n$ to $2^{n+3}|p^2 - 1$.

3. Niech ABCD będzie czworokątem wpisanym w okrąg, a P,Q,R niech będą spodkami wysokości z punktu D odpowiednio na proste BC,CA,AB. Pokaż, że PQ=QR, wtedy i tylko wtedy, gdy dwusieczne kątów ABC i ADC przecinają się na prostej AC.

4. Niech A będzie 101-elementowym podzbiorem zbioru $S = \{1, 2, \ldots, 10^6\}$. Pokaż, że istnieją liczby $t_1, t_2, \ldots, t_{100}$ w S, takie że zbiory $A_j = \{x + t_j, x \in A\}$, gdzie $j = 1, 2, \ldots, 100$, są parami rozłączne.

5. Punkt P leżący wewnątrz trójkąta ABC spełnia: $\angle CBP = \angle CAP = 1/3(\angle CBA + \angle CAB)$. Udowodnij, że $\frac{BC}{AC+PB} = \frac{AC}{BC+PA}$.

6. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb a,b,c zachodzi:
$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leqslant 3/2 * \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$

7. Wielomian W stopnia 2008 o współczynnikach rzeczywistych spełnia warunek $W(n) = \frac{n^2}{n+1}$ dla $n = 0, 1, \ldots, 2008$. Udowodnij, że

$$W(2009) = 2008$$

.