Stare Zwardonie 1 i inne

wtorek, 9 grudnia 2008

1. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt O jest środkiem okręgu opisanego, zaś punkt H jest punktem przecięcia wysokości. Prosta AH przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie K różnym od A. Proste OK i BC przecinają się w punkcie P. Punkt Q jest symetryczny do punktu P względem środka odcinka OH. Proste AQ i BC przecinają się w punkcie R. Dowieść, że $BP = CR$

2. Wyznaczyć wszystkie wielomiany P o współczynnikach rzeczywistych, spełniające dla każdej liczby rzeczywistej x zależność:

$$P(x^2) = P(x) \cdot P(x+2)$$

3. Niech $x, y, z > 0$. Udowodnić, że:

$$\frac{xyz}{(1+3x)(x+8y)(y+9z)(z+6)} \leqslant \frac{1}{7^4}$$

   Określić, kiedy zachodzi równość.

4. Dany jest trójkąt ABC. Okrąg o środku w J, dopisany do trójkąta ABC , jest styczny do odcinka AB w punkcie D. Prosta przechodząca przez punkt D i prostopadła do prostej CD przecina proste AJ i BJ odpowiednio w punktach P i Q. Dowieść, że: $DP = DQ$

5. Wyznaczyć wszystkie zbiory skończone S na płaszczyźnie, złożone z co najmniej trzech punktów i spełniające następujący warunek: dla każdych dwóch różnych punktów A i B zbioru S symetralna odcinka AB jest osią symetrii zbioru S.

6. Udowodnić, że jeśli liczba jest resztą kwadratową dla każdej liczby pierwszej p to jest kwadratem liczby naturalnej.

7. W kółeczku leży $n+1$ pudełek. Na początku w jednym jest n cukierków. Ruch polega na wybraniu dowolnych dwóch pudełek (można wybrać dwa razy to samo pudełko) i przeniesieniu po jednym cukierku do wybranego sąsiada każdego z dwóch pudełek. Znajdź n, że da się tak wykonać ruchy, by w każdym pudełku był jeden cukierek, oprócz pudełka, w którym cukierki były na początku.