

Kongruencje

17.12.2008

1. Liczby całkowite k, m, n spełniają równanie:

$$\frac{m}{n} = \frac{k^2 + m^2}{k^2 + n^2}$$

oraz warunek: $k^2 + m^2 + n^2$ jest liczbą pierwszą. Dowieść, że $m = n$.

2. Udowodnić, że dla liczby pierwszej p różnej od 2 i 5 liczba:

$$\underbrace{11 \dots 1}_p \underbrace{22 \dots 2}_p \dots \underbrace{99 \dots 9}_p$$

daje resztę $12 \dots 9$ z dzielenia przez p .

3. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba całkowita dodatnia n , dla której liczba $7^n - 1$ podzielna jest przez $6^n - 1$.

4. Wyznaczyć wszystkie trójki liczb pierwszych takich, że liczby:

$$pq + r, pq + r^2, qr + p, qr + p^2, rp + q, rp + q^2$$

też są pierwsze.

5. Niech $S(k)$ oznacza sumę cyfr liczby k . Znaleźć wszystkie $n \in \mathbb{N}$, dla których $S(2n^2+3)$ jest kwadratem liczby naturalnej.

6. Liczby całkowite dodatnie a, b, c, d spełniają równość $ad = b^2 + bc + c^2$. Udowodnić, że $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ jest liczbą złożoną.