Olimpiada Iberoamerykańska - ale nie tylko

Zadanie 1. Dany jest kwadrat $ABCD$. Punkty P i Q (różne od wierzchołków kwadratu) zostały obrane na bokach BC i CD tak, że $BP = CQ$. X i Y są punktami odpowiednio na AP i AQ. Pokazać, że z odcinków BX, XY, YD da się skonstruować trójkąt.

Zadanie 2. Znaleźć najmniejszą liczbę naturalną n, taką że w każdym n-elementowym podzbiorze zbioru $\{1, 2, ..., 999\}$ istnieją cztery różne liczby dla których $a + 2b + 3c = d$.

Zadanie 3. Znaleźć wszystkie funkcje $f : N^N$ takie, że

(1) jeśli $x < y$ to $f(x) < f(y)$,

(2) $f(yf(x)) = x^2 f(xy)$.

Zadanie 4. W skończonym ciągu liczb rzeczywistych suma dowolnych iedmiu kolejnych wyrazów jest ujemna, natomiast suma dowolnych jedenastu kolejnych wyrazów jest dodatnia. Wyznaczyć największa możliwą ilośc elementów w tym ciągu.

Zadanie 5. Niech $x_1, x_2, ..., x_n$ będą liczbami dodatnimi. Pokazać, że

$$\frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2x_3} + \frac{x_2^2}{x_2^2 + x_3x_4} + ... + \frac{x_{n-1}^2}{x_{n-1}^2 + x_nx_1} + \frac{x_n^2}{x_n^2 + x_1x_2} \leqslant n - 1$$

Zadanie 6. Pokazać, że istnieje nieskończenie wiele trójek dodatnich liczb całkowitych m, n, p takich że $4mn - m - n = p^2 - 1$, a także, że nie istnieją dodatnie liczby całkowite m, n, p dla których $4mn - m - n = p^2$.

Zadanie 7. Niech okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do jego boków BC, CA, AB w punktach odpowiednio D, E, F. Niech X, Y, Z będą środkami boków odpowiednio EF, FD, DE. Pokazać ,że środki: okręgu wpisanego oraz okręgów opisanych na XYZ i ABC są współliniowe.