Zadania z shortlist - raczej miłe

Zadanie 1. Niech $f : N^N$ będzie funkcją spełniającą nierówność

$$f(n+1) > f(f(n))$$

. Pokazać, że $f(n) = n$ dla wszystkich naturalnych n.

Zadanie 2. Znaleźć wszystkie wielomiany $w \in R[x]$ dla których zachodzi

$$w(x)w(2x^2) = w(2x^3 + x)$$

Zadanie 3. Niech P będzie takim punktem wewnątrz trójkąta ABC, że $\angle PAC = \angle PBC$. Prostopadłe opuszczone z punktu P na proste BC i CA przecinają je odpowiednio w punktach L i M. Oznaczmy środek AB przez D. Pokazać, że $DL = DM$.

Zadanie 4. Dany jest zbiór M złożony z 1985 dodatnich liczb całkowitych, z k"torych żadna nie ma dzielnika pierwszego większego niż 26. Pokazać, że w zbiorze tym istnieją 4 różne elementy, których średnia geometryczna jest liczbą całkowitą.

Zadanie 5. Okrąg o środku O przechodzi przez punkty A i C, oraz przecina boki AC i BC trójkąta ABC w punktach K i N. Okręgi opisane na trójkątach ABC i KBN przecinają się w dwóch różnych punktach B i M. Pokazać, że $\angle OMB = 90^0$

Zadanie 6. Dla jakich liczb natutalnych $n > 2$ istnieje n-kąt foremny którego wszystkie wierzchołki są punktami kratowymi?

Zadanie 7. Niech $n > 6$ i niech $a_1 < a_2 < ... < a_k$ będą wszystkimi liczbami naturalnymi względnie pierwszymi z n i mniejszymi od n. Pokazac, re jeżeli liczby te tworzą ciąg arytmetyczny to n jest pierwsze albo jest potęgą dwójki.