**Elementarne zadania z Putnamu**

**Zadanie 1.** Pokazać, że

$$\prod_{i=1}^{n} nww(1, 2, ..., \left[\frac{n}{i}\right]) = n!$$

**Zadanie 2.** Ciąg $u_n$ jest zdefiniowany następująco $u_0 = 0$, $u_{2n} = u_n + u_{n-1}$, $u_{2n+1} = u_n$. Pokazać, że dla dowolnej dodatniej liczby wymiernej istnieje takie $n$, że

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = k$$

**Zadanie 3.** Znaleźć wszystkie rozwiązania równania

$$x^{n+1} - (x+1)^n = 2001$$

w dodatnich liczbach naturalnych $x, n$.

**Zadanie 4.** Niech $P$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Ciąg $x_i$ definiujemy następująco: $x_0 = 0$, $x_{i+1} = P(x_i)$. Pokazać, że jeżeli dla pewnego $n > 1$ $x_n = 0$ to wówczas $x_1 = 0$ lub $x_2 = 0$.

**Zadanie 5.** Podzbiór zbioru $\{1, 2, .., n\}$ nazwiemy ładnym, jeżeli ¶rednia arytmetyczna jego elementów jest liczbą całkowitą. Pokazać, że liczba ładnych podzbiorów $\{1, .., n\}$ jest tej samej parzystości co $n$.

**Zadanie 6.** $X$ jest skończonym zbiorem liczb całkowitych większych od 1, takim, że dla każej liczby naturalnej $n$ istnieje $x \in X$ które albo dzieli $n$, albo jest względnie pierwsze z $n$. Pokazać, że zbiór $X$ zawiera liczbę pierwszą albo 2 elementy których największy wspólny dzielnik jest liczbą pierwszą.