Różne źródła - ale raczej rosyjskie

Zadanie 1. Pokazać, że dla liczb dodatnich x, y, z dla których $x + y + z = 3$ zachodzi

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \geqslant xy + xz + yz$$

Zadanie 2. Mamy sobie szachownicę $2n$ x $2n$. Na niektórych jej polach położono białą lub czarną kulkę. Wszystkie czarne kulki, które mialy jakaś białą kulkę w tej samej kolumnie zostały usunięte. Następnie wszystkie białe kulki, które miały jakąs z pozostałych czarnych kulek w tym samym wierszu także zostały usunięte. Pokazać, że ta krótka zabawa nie może się zakończyć z większą niż n^2 ilością białych kulek i wiekszą niż n^2 ilością czarnych kulek.

Zadanie 3. Niech S będzie skończonym zbiorem liczb naturalnych, takim, że wśród dowolnej trójki elementów z S istnieją 2 których suma należy do S. Ile najwięcej elementów może miec S ?

Zadanie 4. Dany jest trójkąt ABC. Punkt E leży na jego środkowej wychodzącej z punktu C. Okrąg o_1 przechodzący przez E i styczny do boku AB w punkcie A przecina bok AC w punkcie M. Analogicznie okrąg o_2 przechodzaący przez E i styczny do AB w B przecina BC w N. Pokazać, że okrąg opisany na CMN jest styczny do o_1 i o_2.

Zadanie 5. Cztery dodatnie liczby naturalne mają następującą własność. Suma kwadratów dowolnych dwóch dzieli się przez iloczyn pozostałych dwóch. Pokazać, re co najmniej 3 z tych liczb są równe.

Zadanie 6. Ciąg $a_1, a_2, ...$ dodatnich liczb całkowitych jest określony przez swoje pierwsze 2 wyrazy i zależność

$$a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{gcd(a_n, a_{n+1})}$$

dla jakich a_1, a_2 ciąg ten jest ograniczony?