## KÓŁECZKO Z NIERÓWNOŚCI (9.01.08)

**1.** TEORIA

**1.1.** $a^2 \geqslant 0$ czyli najpotężniejsza nierowność świata.

**1.2.** Nierowności średnich: niech dla danego ciągu $(a_1, a_2, a_3 \ldots a_n)$ liczb rzeczywistych dodatnich $M_i$ oznacza $\sqrt[i]{\frac{a_1^i + a_2^i + \ldots + a_n^i}{n}}$. Aby było jeszcze fajniej $M_0 = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$ Wtedy dla $i > j$ zachodzi $M_i \geqslant M_j$. Rowność zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

**1.3.** Najfajniejsze z poprzedniego jest $M_{-1} \leqslant M_0 \leqslant M_1 \leqslant M_2$.

**1.4.** Nierówność Cauchy'ego - Schwarza: dla dowolnych dwóch ciągów liczb rzeczywistych $(a_1, a_2, \ldots a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ zachodzi

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \ldots b_n^2) \geqslant (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots a_n \cdot b_n)^2$$

.

**2.**ZADANKA

**2.1.** Udowodnij, że dla wszystkich liczb rzeczywistych $a, b$ takich że $a$ jest różne od 0, zachodzi $a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{b}{a^2} \geqslant \sqrt{3}$.

**2.2.** Udowodnić że dla $a, b, c \geqslant 0$ zachodzi $\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leqslant \frac{1}{abc}$.

**2.3.** Udowodnić, że dla liczb $a, b, c \geqslant 0, a^2 + b^2 + c^2 = 3$ zachodzi $a^4 + b^4 + c^4 + a + b + c \geqslant 6$.

**2.4.** Udowodnić dla $a, b, c \geqslant 0$ nierówność $\sqrt{\frac{a^3}{b+c}} + \sqrt{\frac{b^3}{c+a}} + \sqrt{\frac{c^3}{a+b}} \geqslant \frac{a+b+c}{\sqrt{2}}$.

**2.5.** Udowodnić dla $a, b, c \geqslant 0$ nierówność $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$.

**2.6.** Udowodnić dla liczb $a, b, c \geqslant 0$ zachodzi $a + b + c \leqslant \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \leqslant \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ac} + \frac{c^3}{ab}$.

**2.7.** Udowodnij, że dla liczb rzeczywistych dla których zachodzi $a^2+b^2+c^2+d^2 = 4$ zachodzi również $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \leqslant 8$.