Kółko dla starszych - zadania z USAMO (part I)

Zadanie 1. Niech $P(x)$ będzie wielomianem monicznym stopnia n o współczynnikach rzeczywistych. Udowodnić, że istnieją takie moniczne wielomiany $R(x)$ i $Q(x)$ obydwa stopnia n, posiadające wszystkie pierwiastki rzeczywiste i takie, że

$$P(x) = \frac{R(x) + Q(x)}{2}$$

Zadanie 2. Znaleźć wszystkie funkcje $f : R \to R$ takie, że dla każdych x, y zachodzi:

$$f(x^2 - y^2) = xf(x) - yf(y)$$

Zadanie 3. Pokazać, że dowolne dwie liczby naturalne $n, m \geqslant 3$ można połączyć ciągiem liczb naturalnych $n = a_1, a_2, ..., a_k = m$ takim, że iloczyn dowolnych dwóch kolejnych liczb z tego ciągu jest podzielny przez ich sumę.

Zadanie 4. Pokazać, że dla dowolnych dodatnich x, y, z zachodzi

$$\frac{(2x+y+z)^2}{2x^2+(y+z)^2} + \frac{(2y+z+x)^2}{2y^2+(z+x)^2} + \frac{(2z+x+y)^2}{2z^2+(x+y)^2} \leqslant 8$$

Zadanie 5. Dany jest trójkąt ABC i okrąg na nim opisany o. Styczna w A do o przecina prostą BC w punkcie D. Prosta prostopadła do BC w punkcie B przecina symetralną AB w punkcie E, a prosta prostopadą do BC w punkcie C przecina symetralną AC w punkcie F. Udowodnij, że punkty D, E, F są współliniowe.

Zadanie 6 Środek O okręgu opisanego na ABC nie leży na żadnym z jego boków ani na żadnej z jego środkowych. Niech L, M, N będą środkami boków CB, CA, AB odpowiednio. Obierzmy P, Q, R na promieniach OL, OM, ON odpowiednio, tak, że $\angle OPA = \angle OAL$, $\angle OQB = \angle OBM$ i $\angle ORC = \angle OCN$. Pokazać, że proste AP, BQ i CR są współpękowe.

Zadanie 7 Udowodnij, że dla każdego $n \geqslant 1$ istnieje n-cyfrowa liczba złożona tylko z cyfr nieparzystych podzielna przez 5^n.