Kółko dla starszych - zadania z USAMO (part II +bonus)

Zadanie 1. Pokazać, że istnieje skończony zbiór liczb naturalnych będący dowolnego rozmiaru taki, że kwadrat różnicy dowolnych dwóch elementów tego zbioru dzieli ich iloczyn.

Zadanie 2. Dany jest trójkąt ABC. Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na nim, a I- środkiem okręgu wpisanego. Udowodnić, że środki okręgów opisanych na ABI, ACI i BCI leżą na okręgu o środku w O.

Zadanie 3. Niech x_i będzie nieskończonym ciągiem dodatnich liczb rzeczywistych, takim, że dla każdego n mamy $x_1 + ... + x_n \geqslant \sqrt{n}$. Pokazać, że dla każdego n zachodzi $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 > \frac{1}{4}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n})$

Zadanie 4. Sześciokąt $ABCDEF$ ma następujące własności: jego wierzchołki leżą na jednym okręgu, $AB = CD = EF$ a przekątne AD, BE i CF sa współpękowe. Niech X będzie punktem przecięcia AD i CE. Pokazać, że $\frac{CX}{XE} = \frac{AC^2}{CE^2}$

Zadanie 5. Trzy cięciwy sfery: AB, CD i EF przecinają się w jej wnętrzu w punkcie X, ale nie leżą w jednej płaszczyźnie. Sfery opisane na czworościanach $ACEX$ i $BDFX$ są styczne. Udowodnić, że te trzy cięciwy są równej długości.

Zadanie 6. Udowodnij, że dla każdego $n > 0$ zachodzi

$$\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + ... + \frac{1}{5n+1} \leqslant \frac{2}{3}$$

Zadanie 7 Dane są dwie liczby naturalne r, g. Przez $R(r, g)$ oczanczymy najmniejszą liczbę naturalną n o następującej własności: dla dowolnego pokolorowania wszystkich krawedzi grafu K_n na dwa kolory (czerwony i zielony), istnieje podgraf K_r koloru czerwonego lub podgraf K_g koloru zielonego. Dowieść, że

$$(r-1)(g-1) + 1 \leqslant R(r, g) \leqslant \binom{r+q-2}{r-1}$$

Zadanie 8 (Nieskończone twierdzenie Ramseya) Tym razem nasz graf ma wierzchołki będące wszystkimi liczbami naturalnymi (jest to graf K_N). Pokazać, że kolorując krawędzie tego nieskończoego grafu na 2 kolory, istnieje nieskończona klika jednego koloru lub nieskończona klika drugiego koloru.