Znowu różne

1. Rozstrzygnąć, czy istnieje niestała funkcja $f : Z^+ \longrightarrow Z^+ \cup \{0\}$ spełniająca dla każdej pary $m, n \in \mathbb{Z}^+$ równość

$$f(mn) = f(m) + f(n)$$

2. Rozstrzygnąć, czy istnieje różnowartościowa funkcja $f : Z^+ \longrightarrow Z^+ \cup \{0\}$ spełniająca dla każdej pary $m, n \in \mathbb{Z}^+$ równość

$$f(mn) = f(m) + f(n)$$

3. n-kąt $A_1 A_2 \ldots A_n$ o obwodzie l jest wpisany w okrąg, którego środek leży w jego wnętrzu. Proste styczne do okręgu w punktach $A_1, A_2, \ldots, A_n$ wycinają z płaszczyzny n-kąt o obwodzie L. Pokazać, że $\frac{l}{L} \leqslant \cos \frac{\pi}{n}$.

4. Rozstrzygnąc, czy średnia arytmetyczna dwóch różnych kwadratów liczb całkowitych może być kwadratem liczby całkowitej.

5. W czworokącie $ABCD$ przekątna BD nie jest dwusieczną żadnego z kątów BAC ani ADC. Punkt P leży wewnątrz czworokąta i spełnia równości $\angle PBA = \angle PBC$ oraz $\angle PDA = \angle PDC$. Pokazać, że czworokąt jest wpisywalny w okrąg wtedy i tylko wtedy gdy $AP = PC$.

6. W trójkącie ostrokątnym ABC gdzie $AB < AC$ okrąg o średnicy BC przecina boki AB i AC odpowiednio w punktach M i N. Punkt O jest środkiem odcinka BC zaś dwusieczne kątów $\angle MON$ i $\angle BAC$ przecinają się w R. Pokazać, że okręgi opisane na trójkątach BMR i CNR mają punkt wspólny z odcinkiem BC.

7. W równoległoboku $ABCD$ na bokach CD i BC obrano punkty N i M tak, by $\frac{DN}{NC} = \frac{CM}{MB}$. Proste AM i AN przecinają przekątną BD w punktach P i Q odpowiednio. Pokazać, że $[ABP] + [ADQ] = [PQNCM]$.