Nierówności cykliczne I seria

1. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich x, y, z zachodzi nierówność

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

2. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich x, y, z zachodzi nierówność

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2}.$$

Jak można uogólniać te nierówności dla większej liczby zmiennych?

Nierówności cykliczne II seria

3. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność

$$\frac{x_1}{x_2+\ldots+x_n} + \frac{x_2}{x_3+\ldots+x_1} + \ldots + \frac{x_n}{x_1+\ldots+x_{n-1}} \geq \frac{n}{n-1}.$$

4. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zachodzi przynajmniej jedna z nierówności

$$\frac{x_1}{x_2+x_3} + \frac{x_2}{x_3+x_4} + \ldots + \frac{x_n}{x_1+x_2} \geq \frac{n}{2}$$

lub

$$\frac{x_1}{x_n+x_{n-1}} + \frac{x_2}{x_1+x_n} + \ldots + \frac{x_n}{x_{n-1}+x_{n-2}} \geq \frac{n}{2}$$

5. Problemem Shapiro nazywamy pytanie, dla jakich n nierówność

$$\frac{x_1}{x_2+x_3} + \frac{x_2}{x_3+x_4} + \ldots + \frac{x_n}{x_1+x_2} \geq \frac{n}{2}$$

zachodzi dla wszystkich liczb dodatnich x_i.

Udowodnij, że jeśli w problemie Shapiro istnieje kontrprzykład dla n, to istnieje kontrprzykład dla $n+2$.

UWAGA Kontrprzykładem dla $n = 14$ jest ciąg

$$\frac{1007}{1000}, \frac{7}{1000}, \frac{1004}{1000}, \frac{6}{1000}, \frac{1001}{1000}, \frac{5}{1000}, 1, \frac{2}{1000}, \frac{1001}{1000}, 0, \frac{1004}{1000}, \frac{1}{1000}, \frac{1006}{1000}, \frac{4}{1000},$$

dla którego wartość powyższego wyrażenia wynosi $6,999998254$.

Jak w świetle zadań z tej serii można próbować uogólnić nierówność 2.?

Nierówności cykliczne III seria

6. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b zachodzi nierówność

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^2+b^2}{2} \cdot \frac{a^3+b^3}{2} \leq \frac{a^6+b^6}{2}.$$

7. Niech a, b, c będą długościami boków trójkąta, zaś m_a, m_b i m_c długościami jego odpowiednich środkowych. Udowodnij, że

$$9\Big(\frac{m_a}{a^2} + \frac{m_b}{b^2} + \frac{m_c}{c^2}\Big) \geq (m_a + m_b + m_c)\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\Big)^2.$$