Funkcje seria 0

0.1 Wielomian całkowitoliczbowy $ax^2 + bx + c$ daje wartości będące kwadratami liczb naturalnych dla wszystkich x naturalnych. Udowodnij, że wielomian ten jest kwadratem innego wielomianu całkowitoliczbowego.

0.2 Niech π będzie dowolną permutacją zbioru $\{1, 3, \ldots, 2n-1\}$. Udowodnij, że zachdzi następująca nierówność:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i^2 + \pi(i)^2} \geq \frac{n}{2}\sqrt{1 + 5n^2}.$$

0.3 Ciąg (a_n) zadany jest w następujący sposób: $a_1 = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (a_n)^2}}$. Oblicz

$$\lim_{n\to\infty} 2^n a_n.$$

Funkcje I seria

1. Udowodnij, że jeśli f jest niestałą funkcją rzeczywistą taką, że

$$f(x-1) + f(x+1) = \sqrt{3}f(x),$$

to f jest okresowa. Znajdź najmniejszy okres f.

2. Niech $\mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb całkowitych dodatnich. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość $f(f(n)) = 2n$.

3. Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ spełniające dla każdego $x \in \mathbb{Z}$ warunek

$$3f(x) - 2f(f(x)) = x.$$

Funkcje II seria

4. Dana jest funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dla której $f(n+1) > f(f(n))$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że $f(n) = n$ dla każdego n.

5. Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające równanie:

$$f(x^2 + y) + f(f(x) - y) = 2f(f(x)) + 2y^2$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.

Funkcje III seria

6. Udowodnij, że każdy trójkąt pitagorejski o przyprostokątnych, których długości boków są kolejnymi liczbami naturalnymi, ma boki postaci $f^k(3, 4, 5)$, gdzie f jest funkcją zdefiniowaną nastepująco: $f(x, x+1, z) = (3x+2z+1, 3x+2z+2, 4x+3z+2)$, zaś f^k, gdzie $k \in \mathbb{N}$, oznacza k-krotne złożenie f.

7. Niech $f : \mathbb{R} - \{0, \ldots, 99\} \to \mathbb{R}$ będzie określona wzorem $f(x) = \sum_{k=0}^{99} \frac{1}{x-k}$. Znaleźć miarę tej części odcinka $[0, 100]$, że $f(x) \geq 1$.