KÓŁECZKO ZE ZŁOŻEŃ IZOMETRII I JEDNOKŁADNOŚCI (12.12.07)

1. TEORIA (o jednokładności)

Złożenie dwóch jednokładności o środkach O_1, O_2jest:

- jeśli $\alpha \cdot \beta = 1$ - przesunięciem o wektor $\vec{O_2O_1}$
- jeśli $\alpha \cdot \beta$ różne od 1 - jednokładnością o skali $\alpha \cdot \beta$ i środku leżącym na prostej O_1O_2

2. ZADANIA

2.1. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okąg. Na bokach AB i CD tego czworokąta budujemy, po jego zewnętrznej stronie, przystające prostokąty o bokach długości AB i CD. Analogicznie, na bokach BC i DA budujemy, po zewnętrznej stronie czworokąta $ABCD$ przystające prostokąty o bokach długości BC i DA. Wykazać, że środki tych czterech prostokątów są wierzchołkami prostokąta.

2.2. Punkty D, E, F, leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC. W czworokąty $AFDE$, $CEFD$, $DEFB$ da się wpisać okręgi. Wykazać, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.

2.3. Kwadraty $ABCD$ i $PQRS$ są jednakowo zorientowane. Wykazać, że środki odcinków AP, BQ, CR, DS są wierzchołkami kwadratu.

2.4. Dany jest trójkąt ABC. Okrąg o_1 jest styczny do jego boków AB i BC, okrąg o_2 - do boków BC i CA, zaś okrąg o_3 - do boków CA i AB. Okrąg o_4 jest styczny zewnętrznie do okręgów o_1, o_2, o_3 w punktach odpowiednio X, Y, Z. Wykazać, że proste AX, BY, CZ przecinają się w jednym punkcie.

2.5. Przystające, rozłączne okręgi o_1 i o_2 są styczne wewnętrznie do okręgu o w punktach odpowiednio A i B. Punkt P należy do okręgu o, odcinki PA i PB przecinają okręgi o_1 i o_2 odpowiednio w punktach C i D. Wykazać, że $AB \parallel CD$.

2.6. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ oraz trójkąty prostokątne równoramienne ABP, BCQ, CDR, DAS, nie leżące na zewnątrz czworokąta $ABCD$, o kątach prostych przy wierzchołkach P, Q, R, S. Wykazać, że jeżeli $P = R$, to $Q = S$.

2.7. Czworokąt wypukły $ABCD$ podzielono na dziewięc czworokątów wypukłych, jak na rysunku. Wykazać, że jeśli w zacieniowane czworokąty można wpisać okręgi, to proste AX, BY, CZ i DT przecinają się w jednym punkcie.