Задачи с изюминкой
15.04.2009

1. Wewnątrz kwadratu o boku długości 1 wybrano 9 punktów, z których żadne 3 nie są współliniowe. Wykazać, że pewne 3 z nich tworzą trójkąt o polu niewiększym niż $\frac{1}{8}$.

2. Dla $|x| < 1$ obliczyć sumę

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

3. Wykazać, że jeśli $a,\ b,\ c,\ h_a,\ h_b,\ h_c$ są długościami odpowiednio boków i wysokości trójkąta ostrokątnego, to zachodzi nierówność:

$$\frac{1}{2} < \frac{h_a + h_b + h_c}{a + b + c} < 1.$$

4. Udowodnić, że w czworościanie foremnym proste łączące środki naprzeciwległych krawędzi przecinają się w jednym punkcie.

5. Wewnątrz trójkąta o bokach długości a, b, c obierzmy punkt P i poprowadźmy przez niego proste równoległe do boków trójkąta. Każdy z boków zostanie podzielony na 3 odcinki. Oznaczmy długości środkowych z nich przez odpowiednio a', b', c'. Wykazać, że

$$\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} = 1.$$

6. Punkt M jest środkiem boku AB trójkąta ABC. Punkt D leży wewnątrz trójkąta ABC i spełnia warunki

$$\angle DAC = \angle ABC, \qquad \angle DCA = \angle BCM.$$

Udowodnić, ze prosta DM jest równoległa do prostej BC.

7. W trójkącie ABC dwusieczna kata BCA przecina okrąg opisany na tym trójkącie w punkcie R różnym od C, symetralną odcinka BC w punkcie P oraz symetralną odcinka AC w punkcie Q. Punkt K jest środkiem odcinka BC, a punkt L jest środkiem odcinka AC. Wykazać, ze trójkąty RPK oraz RQL maja równe pola.