Wielomiany

03.12.2008

1. Rozstrzygnąć, czy istnieje wielomian o współczynnikach całkowitych taki, by:

$$W(7) = 11 \quad \text{i} \quad W(11) = 13.$$

2. Znaleźć reszty z dzielenia wielomianu $(x^2 - x - 1)^{2008}$ przez:

(i) wielomian $x - 1$;
(ii) wielomian $x^2 - 1$.

3. Niech $W(x)$ będzie wielomianem unormowanym (wszystkie współczynniki całkowite, współczynnik przy najwyższej potędze równy 1). Wykazać, że jeśli ten wielomian posiada pierwiastek wymierny x_0, to jest on całkowity.

4. Niech $W(x)$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych takim, że istnieją 4 różne argumenty całkowite x_1, x_2, x_3, x_4 spełniające:

$$W(x_1) = W(x_2) = W(x_3) = W(x_4) = 1.$$

Wykazać, że nie istnieje takie całkowite x_5, by $W(x_5) = -1$.

5. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych układ równań:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 20. \end{cases}$$

6. Wielomian $P(x)$ ma współczynniki całkowite. Udowodnić, że jeżeli wielomiany $P(x)$ oraz $P(P(P(x)))$ maja wspólny pierwiastek rzeczywisty, to mają także wspólny pierwiastek całkowity.