KÓŁECZKO Z WIELOMIANÓW (10.10.2007)

1. TEORIA

1.1. Definicja - Wielomianem nazywamy funkcję $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daną wzorem:
$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ dla pewnych liczb rzeczywistych $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$. Liczby te nazywamy wpółczynnikami wielomianu W, zaś n jego stopniem. Liczbę b taką, że $W(b) = 0$ nazywamy pierwiastkiem wielomianu.

1.2. Twierdzenie Bezout - Liczba rzeczywista x_0 jest pierwiastkiem wielomianu W wtedy i tylko wtedy gdy wielomian W można przedstawić w postaci $(x - x_0)P(x)$ dla pewnego wielomianu P (Jeśli W ma współczynniki całkowite, to P również).

1.3. Wzory Vietea - Jeśli wielomian W stopnia n ma n pierwiastków rzeczywistych $x_1, x_2, \dots, x_n$, to:

$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$

$x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$

$\ldots$

$x_1 x_2 \ldots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$

1.4. Fakcik o pierwiastkach wymiernych
Jeśli wielomian $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ma wszystkie współczynniki całkowite i liczba wymierna $\frac{p}{q}$ jest jego pierwiastkiem (gdzie $NWD(p, q) = 1$), to $p | a_0$ i $q | a_n$.

1.5. Fakcik o podzielności

Jeśli W ma wszystkie współczynniki całkowite, to dla dowolnych całkowitych liczb a, b zachodzi $a - b | W(a) - W(b)$.

2. ZADANKA

2.1. Wykazać, że jeśli W jest wielomianem o współczynnikach całowitych, $9|W(223)$ i $223|W(9)$, to $2007|W(232)$.

2.2. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} a+b+c+d=-1 \\ ab+ac+ad+bc+bd+cd=-7 \\ abc+abd+acd+bcd=13 \\ abcd=-6 \end{cases}$$

2.3. Liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots, a_n$ spełniają warunek $\sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant 3n$. Udowodnić, że $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geqslant 8n$

2.4. Wielomian $P(x)$ stopnia n o współczynnikach rzeczywistych dla dowolnej liczby $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ spełnia równość:

$$P(k) = \frac{k}{k+1}$$

Obliczyć $P(n+1)$.

2.5. Niech $P(x)$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Udowodnić, że jeśli w conajmniej sześciu różnych liczbach całkowitych przyjmuje on wartość 2007, to nie ma pierwiastków całkowitych.

2.6. Dany jest ciąg X 1001 liczb całkowitych $x_1, x_2, \ldots, x_{1001}$ o następującej własności: dla dowolnego wielomianu $P(x)$ stopnia 2 o współczynnikach całkowitych istnieją trzy elementy ciągu X, mianowicie k, l, m, że $P(k) = P(l) = P(m)$. Pokazać, że w ciągu X istnieje co najmniej jedna trójka równych wyrazów.

2.7. Wyznaczyć wszystkie takie pary (n, r), że $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{R}$ oraz wielomian $(x-2)^n - r$ dzieli się przez $x^2 - 2x + 2$.

2.8. Wielomian o współczynnikach całkowitych przyjmuje wartość 2 dla trzech różnych argumentów całkowitych. Wykazać, że nie przyjmuje on wartości 543 dla trzech różnych argumentów całkowitych.