Różny trening przed finałem

1. Niech k będzie liczbą całkowitą dodatnią oraz ciąg a_n będzie zdefiniowany warunkami:

$$a_1 = k, a_n = k^{a_{n-1}}$$

dla $n > 1$. Pokazać, że jeśli m jest dowolną liczbą całkowitą dodatnią, to ciąg a_n jest od pewnego miejsca stały modulo m.

2. Pokazać, że jeśli p jest liczbą pierwszą oraz n jest naturalne, to $p^2 | \binom{np}{p} - n$.

3. Pokazać, że jeśli liczby dodatnie a, b, c sumują się do 1, to jest spełniona nierówność:

$$\frac{1}{(1-a)(1-b)} + \frac{1}{(1-b)(1-c)} + \frac{1}{(1-c)(1-a)} \leqslant \frac{1}{abc}$$

4. W przestrzeni dany jest trójkąt ABC oraz sfera s rozłączna z płaszczyzną ABC. Przez każdy z punktów A, B, C przeprowadzono prostą styczną do sfery. Punkty styczności oznaczono odpowiednio K, L, M. Punkt P leży na sferze i spełnia warunki:

$$\frac{AK}{AP} = \frac{BL}{BP} = \frac{CM}{CP}$$

Udowodnić, że sfera opisana na czworościanie $ABCP$ jest styczna do sfery s.

5. Ciąg a_i określony jest wzorami:

$$a_1 = 0, a_n = a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Dla każdego k całkowitego nieujemnego znaleźć liczbę takich n, dla których $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$ oraz $a_n = 0$.

6. Punkty D i E leżą na boku AB trójkąta ABC oraz spełniają równości:

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{AE}{EB} = (\frac{AC}{AB})^2$$

Pokazać, że $\angle ACD = \angle BCE$.

7. W Mistrzostwach Świata w Brydżu Sportowym z Dziadkiem bierze udział 211 uczestników. W każdym rozdaniu bierze udział trzech uczestników. Pokazać, że da się tak ustalić harmonogram rozgrywek, aby każdych dwóch uczestników spotkało się przy rozgrywce dokładnie raz.