Zadania z wielomianów - wykład na 7WM

1. Wielomian całkowitoliczbowy $W(x)$ spełnia $5|W(2)$ oraz $2|W(5)$. Pokazać, że $10|W(7)$

2. Niech $W(x)$ będzie wielomianem całkowitoliczbowym dla którego $W(i) = 4i + 3$ dla i od 1 do n, gdzie $n > 1$. Pokazać, że $W(x)$ nie ma pierwiastków całkowitych.

3. Pokazać, że dla żadnego wielomianu całkowitoliczbowego $W(x)$ nie istnieją takie różne liczby całkowite $a, b, c,$, że $b = W(a)$, $c = W(b)$ oraz $a = W(c)$.

4. Pokazać, że w zadaniu trzecim nie istnieje również żaden ciąg więcej niż trzech wyrazów, który spełnia analogiczną cykliczną zależność.

5. Niech $P(x)$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Udowodnić, że jeśli w conajmniej sześciu różnych liczbach całkowitych przyjmuje on wartość 12, to nie ma pierwiastków całkowitych.

6. Znaleźć wszystkie rozwiązania układu równań w liczbach rzeczywistych:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ ab + bc + ac = -7 \\ abc = 6 \end{cases}$$

7. Znaleźć wszystkie rozwiązania układu równań w liczbach rzeczywistych:

$$\begin{cases} a + b + c = 5 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 29 \\ a^3 + b^3 + c^3 = 83 \end{cases}$$

8. Niezerowe liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają warunki:

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 0 \\ abcd = 1 \end{cases}$$

Pokazać, że $|ab + ac + ad + bc + bd + cd| \geqslant 2$.

9. Znaleźć wszystkie takie wielomiany $W(x)$, że $W(x^2) = (W(x))^2$ dla każdego rzeczywistego x.

10. Wyznaczyć wszystkie pary liczb całkowitych a, b, dla których istnieje taki wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych, że iloczyn $(x^2 + ax + b) \cdot P(x)$ jest wielomianem postaci:

$$x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1x + c_0$$

gdzie każda z liczb $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ jest równa 1 lub -1.