

Wektorki i inne

1. Na płaszczyźnie danych jest n wektorów. Udowodnić, że istnieje prosta taka, że suma rzutów wektorów na tę prostą wynosi 0.

2. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt D jest rzutem prostokątnym punktu C na prostą AB . Punkt E jest rzutem prostokątnym punktu D na prostą BC . Punkt F leży na odcinku DE , przy czym $\frac{EF}{FD} = \frac{AD}{DB}$. Wykazać, że proste CF i AE są prostopadłe.

3. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ punkty K, L, M, N, O, P są odpowiednio środkami odcinków AC, BD, CE, DF, EA, FB . Pokazać, że pole sześciokąta $KLMNOP$ jest cztery razy mniejsze niż sześciokąta $ABCDEF$.

4. Operacją $T(ABC, k)$ nazywamy wzięcie trójkąta ABC , umieszczenie na bokach BC, AC, AB punktów K, L, M takich, że $\frac{BK}{KC} = \frac{CL}{LA} = \frac{AM}{MB} = k$ i wyplucie odcinków długości AK, BL, CM .

- Pokazać, że dla każdego trójkąta ABC i nieujemnego k z odcinków powstałych w wyniku $T(ABC, k)$ da się zbudować trójkąt.
- W trójkącie wykonano najpierw $T(ABC, \frac{1}{2})$, następnie złożono z powstałych odcinków trójkąt KLM i wykonano $T(KLM, 2)$. Pokazać, że trójkąt złożony z trzech powstałych odcinków jest podobny do ABC i znaleźć skalę podobieństwa.

5. W trójkącie ABC umieszczono na bokach BC, AC, AB punkty K, L, M takie, że $\frac{BK}{KC} = \frac{CL}{LA} = \frac{AM}{MB} = k$, gdzie $k > 0$. Pokazać, że ortocentra trójkątów KLM i ABC się pokrywają wtedy i tylko wtedy gdy ABC jest równoboczny.

6. Na płaszczyźnie dane jest koło, które przykryto nieskończonym paskiem o szerokości jego średnicy. Następnie pasek pocięto na skończoną liczbę pasków o niezerowej szerokości i jeden wyrzucono. Pokazać, że teraz nie da się paskami pokryć całego koła.

7. W ostrosłupie prawidłowym o wierzchołku S i podstawie $A_1A_2 \dots A_n$ każda krawędź boczna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 60° . Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$ rozstrzygnąć, czy można wybrać takie punkty $B_2, B_3 \dots B_n$ leżące odpowiednio na krawędziach $A_2S, A_3S \dots A_nS$, że

$$A_1B_2 + B_2B_3 + B_3B_4 + \dots + B_nA_1 < 2A_1S$$