Trudniejsze

Termin: 3.12.2009

1. Na bokach AC i BC trójkąta ostrokątnego ABC wybrano odpowiednio takie punkty D i E, że $AB = AD = BE$. Czworokąt $ABGD$ jest rombem, a punkt F – odbiciem punktu E względem G. Dwusieczna kąta CAB przecina bok BC w punkcie X, a dwusieczna kąta CBA przecina bok AC w punkcie Y. Wykazać, że prosta XY jest równoległa do prostej DG.

2. Udowodnić nierówność między średnimi potęgowymi, to znaczy pokazać, że dla dowolnych dodatnich liczb naturalnych $p > q$ i dowolnych n nieujemnych liczb rzeczywistych $x_1,\ x_2, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność:

$$\sqrt[p]{\frac{x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p}{n}} \geqslant \sqrt[q]{\frac{x_1^q + x_2^q + \ldots + x_n^q}{n}}.$$

3. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A, a punkt M – środkiem boku AB. E i F to takie punkty na odcinku AB, że $\angle ACE = \angle BCF$. Punkty G i H to rzuty odpowiednio punktu A na prostą CE i punktu B na prostą CF. Wykazać, że punkty D, M, G, H leżą na jednym okręgu.