Trochę teorii liczb i jeszcze Czechy

1. Niech $\tau(n)$ oznacza liczbę dodatnich dzielników n. Pokazać, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi:

$$\tau(n^3) \leqslant (\tau(n))^2$$

Kiedy zachodzi równość?

2. Niech $\tau(n)$ oznacza liczbę dodatnich dzielników n zaś $\sigma(n)$ sumę tych dzielników. Pokazać, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi:

$$\frac{\sigma(n)}{\tau(n)} \geqslant \sqrt{n}$$

3. Pokazać, że dla względnie pierwszych p, q największą liczbą naturalną, której nie da się przedstawić w postaci $kp + lq$ gdzie k, l są naturalne, jest $pq - p - q$.

4. Ile jest liczb naturalnych których nie da się przedstawić w postaci z zadania 3?

5. Pokazać, że dla liczb dodatnich x, y, z sumujących się do 1 zachodzi nierówność:

$$\frac{1}{x+yz} + \frac{1}{y+zx} + \frac{1}{z+xy} \geqslant 16(\frac{1}{(3-x)^2} + \frac{1}{(3-y)^2} + \frac{1}{(3-z)^2})$$

6. W czworościan $ABCD$ wpisano sferę. Cztery płaszczyzny styczne do tej sfery i równoległe do odpowiednich boków czworościanu odcinają z niego cztery mniejsze czworościany. Pokazać, że suma długości wszyskich 24 krawędzi tych czworościanów jest równa podwojonej sumie długości krawędzi czworościanu $ABCD$.

7. Punkt L leży na krótszym łuku CD okręgu opisanego na kwadracie $ABCD$. Prosta AL przecina prostą CD w punkcie K, prosta CL przecina prostą AD w M zaś prosta KM przecina prostą BC w N. Pokazać, że punkty B, N, M, L leżą na jednym okręgu.