Trygonometria

1. Niech dla każdego n zachodzi $f(n) = n \sin n^\circ$. Pokazać, że zachodzi:

$$f(2) + f(4) + \cdots + f(180) = 90 \operatorname{ctg} 1^\circ$$

2. Ciąg a_i określony jest następująco: $a_0 = x$ oraz $a_k = \frac{2a_{k-1}}{1-a_{k-1}^2}$ zaś, kończymy go, gdy pojawi się wyraz o module równym 1. Znaleźć wszystkie x dla których ciąg jest skończony.

3. Ciągi a_i oraz b_i określone są warunkami: $a_0 = x$, $b_0 = y$, gdzie $x^2 + y^2 < 4$, $a_k = a_{k-1}b_{k-1}$ oraz $b_k = \frac{b_{k-1}^2 - a_{k-1}^2}{2}$ dla $k \in \mathbb{Z}^+$. Pokazać, że dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje takie n, by $a_n < \epsilon$ i $b_n < \epsilon$.

4. Pokazać, że dla dowolnego x rzeczywistego i n całkowitego dodatniego zachodzi:

$$\cos(x) + \cos(x + \frac{\pi}{n}) + \cos(x + \frac{2\pi}{n}) + \cdots + \cos(x + \frac{(2n-1)\pi}{n}) = 0$$

5. Dana jest liczba $n \in \mathbb{Z}^+$. Znaleźć wszystkie takie x, by:

$$\cos(x) + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx) = 0$$

6. Znaleźć maksymalną możliwą wartość wyrażenia $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$ dla $x, y \in [-1, 1]$.

7. Pokazać, że dla a, b rzeczywistych dodatnich, takich, że $a \geqslant b$ zachodzi:

$$\sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{2ab - b^2} \geqslant a$$