Trudniejsze

Termin: 07.01.2010

1. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A, a punkt M – środkiem boku BC. E i F to takie punkty na odcinku BC, że $\angle BAE = \angle CAF$. Punkty G i H to rzuty odpowiednio punktu B na prostą AE i punktu C na prostą AF. Wykazać, że punkty D, M, G, H leżą na jednym okręgu.

2. Punkty A, B, C, D, E i F leżą w tej kolejności na okręgu. Niech $P = AC \cap FB$, $Q = BD \cap AC$, $R = CE \cap BD$, $S = DF \cap CE$, $T = EA \cap DF$ i $U = FB \cap EA$. Wykazać, że proste PS, QT i RU przecinają się w jednym punkcie.

3. Niech $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$ będą ustalonymi liczbami rzeczywistymi. Wykazać, że zachodzi nierówność:

$$\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2} + \ldots + \frac{x_n}{1+x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2} < \sqrt{n}.$$