Zadania trudniejsze dla odmiany

1. Rozwiązać układ równań w liczbach nieujemnych:

$$\begin{cases} 1 + x_1 = x_2^2 \\ 1 + x_2 = x_3^2 \\ \dots \\ 1 + x_{1995} = x_{1996}^2 \\ 1 + x_{1996} = x_1^2 \end{cases}$$

2. Pokazać, że dla każdego n całkowitego dodatniego zachodzi:

$$1\sqrt{\binom{n}{1}} + 2\sqrt{\binom{n}{2}} + \ldots + n\sqrt{\binom{n}{n}} \leqslant \sqrt{2^{n-1}n^3}$$

3. Niech a, b, c, d będą takimi liczbami nieujemnymi, że $ab + bc + cd + da = 1$. Pokazać, że zachodzi:

$$\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{c+d+a} + \frac{c^3}{d+a+b} + \frac{d^3}{a+b+c} \geqslant \frac{1}{3}$$

.

4. W czworokącie $ABCD$ wpisywalnym w okrąg i opisywalnym na okręgu, punkt S jest środkiem okręgu wpisanego. Prosta przechodząca przez S i równoległa do AB przecina proste AD i BC odpowiednio w punktach K i L, zaś prosta przechodząca przez S i równoległa do BC przecina proste AB i CD odpowiednio w punktach P i Q. Pokazać, że $KL = PQ$.

5. W trójkącie ABC punkt I to środek okręgu wpisanego, a S to szodek okręgu dopisanego, stycznego do boku BC. Pokazać, że środek odcinka SI leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC.

6. Dany jest ustalony okrąg γ o środku w S i ustalona prosta l. Punkt M jest rzutem S na l. Punkt P jest zmiennym punktem na okręgu γ, okrąg o średnicy PM przecina γ ponownie w X i l ponownie w Y. Pokazać, że dla dowolnego wyboru P proste XY przechodzą przez ustalony punkt.