....
imie i nazwisko *klasa* *nr telefonu*

Test kwalifikacyjny na VII Warsztaty Matematyczne

Klasa pierwsza

Na pytania odpowiada się „tak” lub „nie” poprzez wpisanie odpowiednio „**T**” bądź „**N**” w pole obok pytania. W danym trzypytaniowym zestawie możliwa jest dowolna kombinacja odpowiedzi „tak” i „nie”. W zestawach zaznaczonych gwiazdką (gwiazdka wygląda tak: *) prócz udzielenia odpowiedzi należy je uzasadnic.

Zasady punktacji:
Za pojedynczą poprawną odpowiedź: **1** punkt.
Za pojedynczą niepoprawną odpowiedź: **−1** punkt.
Za brak odpowiedzi: **0** punktów.
Za wszystkie poprawne odpowiedzi w jednym trzypytaniowym zestawie dodatkowe **2** punkty.
Za poprawne uzasadnienie pojedynczej odpowiedzi: **1** punkt.
Za niepoprawne uzasadnienie pojedynczej odpowiedzi badź brak takowego: **0** punktów.

Powodzenia!

1. W trójkącie ABC boki AB i AC mają długości 2 i 3. Czy środkowa spuszczona z wierzchołka A może mieć długość:

☐ $\frac{\sqrt{2}}{3}$?
☐ $\sqrt{2}$?
☐ $2\sqrt{2}$?

2. Nierówność $a^3 > a^5$ jest prawdziwa dla:

☐ $a < 0$.
☐ $0 < a < 1$.
☐ $a < -1$.

3. W grzybobraniu wzięła udział cała rodzina. Marek znalazł tyle samo prawdziwków, co jego syn, a Tomasz znalazł 3 razy więcej prawdziwków niż jego syn. Beata, żona Tomasza, i żona Marka Agnieszka znalazły w sumie 2 razy więcej prawdziwków niż syn Marka. Jeśli cała rodzina została już wymieniona i zebrała w sumie 77 prawdziwków, to:

☐ Marek uzbierał 11 grzybów.
☐ Marek jest synem Tomasza.
☐ Tomasz jest synem Marka.

4*. Ustawiamy skoczka szachowego na dowolnym polu szachownicy $n \times n$ i próbujemy wykonując nim standardowe ruchy odwiedzić każde pole szachownicy dokładnie raz i wrócić na pole początkowe. Da się to zrobić dla:

- ☐ $n = 3$
- ☐ $n = 4$
- ☐ $n = 7$

5. Czy prawdziwe są następujące nierówności?

- ☐ $22^{55} > 55^{22}$
- ☐ $2006 \cdot 200720072007 > 2007 \cdot 200620062006$
- ☐ $\sqrt{2005} + \sqrt{2007} > 2\sqrt{2006}$

6. Może istnieć pięciokąt:

- ☐ posiadający dwa kąty wklęsłe.
- ☐ posiadający dwa kąty wklęsłe i 2 rozwarte.
- ☐ posiadający jeden kąt rozwarty i 4 kąty ostre.

7. W kwadracie 2×2 umieściliśmy 5 punktów. Czy możliwe, aby najmniejsza odległość między dwoma z nich była równa:

- ☐ 1
- ☐ $\sqrt{2}$
- ☐ $\frac{3}{2}$

8. Krawędzie sześcianu ponumerowano dwunastoma różnymi liczbami ze zbioru od 1 do 13 tak, by suma numerów krawędzi wychodzących z każdego wierzchołka była równa. Czy ta suma może być równa:

- ☐ 19.
- ☐ 21.
- ☐ 23.

9. Liczby p i $8p^2 + 1$ są pierwsze. Wynika stąd, że:

- ☐ liczba $p^3 + 2$ może być złożona.
- ☐ nie ma takiej liczby p.
- ☐ $5 | p^{2006} + 1$.

10*. Wśrod liczb $1^1, 2^2, 3^3, 4^4, \ldots$ jest nieskończenie wiele liczb:

- ☐ mających nieparzystą liczbę cyfr w zapisie dziesiętnym.
- ☐ rozpoczynających się cyfrą nieparzystą.
- ☐ kończących się cyfrą nieparzystą.

11. W księstwie Hofmańskim książe założył miasta A, B, C, D, E. Wielki mierniczy zmierzył odległości i uzyskał wyniki: odległość między A i B wynosi 36 kilometrów, między A i D 131 kilometrów, między B i C 64 kilometry, między C i E 80 kilometrów, między A i E 60 kilometrów zaś między C i D 31 kilometrów. Wówczas:

- ☐ Odległość między B i E wynosi 48 kilometrów
- ☐ kąt BCE jest prosty.
- ☐ kąt EBD jest prosty.

12*. W pewnej grze dwaj gracze naprzemian kładą kostki domina (2×1) na pola planszy. Przegrywa ten, który nie może wykonać ruchu. Strategię wygrywająca ma pierwszy gracz, jeśli plansza ma kształt:

- ☐ szachownicy 8×8 z wyciętymi przeciwległymi rogami.
- ☐ szachownicy 7×8.
- ☐ szachownicy 7×7 z wyciętym środkowym polem.

13. Suma skończenie wielu liczb

- ☐ wymiernych może być niewymierna.
- ☐ niewymiernych może być wymierna.
- ☐ których moduł (wartość bezwzględna) jest większa od 1 musi być większa od 1.

14*. W ciągu arytmetycznym postaci $an+b$, gdzie $n=0,1,2,\ldots$, zaś a,b są całkowite dodatnie:

- ☐ musi istnieć potęga liczby naturalnej o wykładniku większym od 1.
- ☐ musi istnieć silnia liczby naturalnej.
- ☐ musi istnieć liczba pierwsza.

15. Funkcja f jest parzysta a g nieparzysta. Wówczas:

- ☐ $f(g(f(g(f(g(x))))))$ jest parzysta.
- ☐ $g(f(g(f(g(f(x))))))$ jest nieparzysta.
- ☐ $g(g(g(f(x^2))))$ jest nieparzysta.

16. Czy:

- ☐ rzut czworościanu może być kwadratem?
- ☐ wśród 5 punktów na sferze istnieją conajmniej 4 na jednej półsferze (z brzegiem)?
- ☐ przekrój sześcianu może być siedmiokątem?

17. Jeśli a i b są liczbami całkowitymi dodatnimi, to liczba $\frac{ab}{a+b}$ może być:

- ☐ mniejsza od 1.
- ☐ każdą liczbą całkowitą dodatnią.
- ☐ większa niż 2006^{2006}.

18. Jeśli liczba $n>1$ jest nieparzysta, to liczba $n^6-n^4-n^2+1$ w rozkładzie na czynniki pierwsze:

- ☐ ma zawsze conajmniej 7 dwójek.
- ☐ ma zawsze dokładnie 7 dwójek.
- ☐ może mieć dokładnie 8 dwójek.

19*. Na szachownicy 8×8 można ustawić w pozycjach niebijących:

- ☐ 15 gońców.
- ☐ 8 wież.
- ☐ 33 pionki jednego koloru.

20. Nadbor chce ustawić w rządku 666 swoich gumowych lalek, z czego 222 to misie a 444 to ptysie. Może to zrobić:

☐ tak, aby obok (bezpośrednio za lub przed) każdego ptysia stał miś.
☐ tak, aby w 60 miejscach miś stał bezpośrednio za ptysiem.
☐ tak, aby bezpośrednio za każdym misiem stał ptyś.

21. Romek, Andrzej i Jarek bawią się w piaskownicy zabawkami. Gdyby Romek zabrał Andrzejowi połowę jego zabawek, to miałby ich dwa razy mniej niż Jarek. Gdyby Andrzej zabrał wszystkie zabawki Romkowi, to miałby ich o 10 mniej niż Jarek. A gdyby zgodnie ze swoim planem Jarek zabrał wszystkie zabawki z piaskownicy, to miałby ich w sumie 110.

☐ Romek ma mniej niż 15 zabawek.
☐ Jarek i Romek mają ponad dwa razy więcej zabawek niż Andrzej.
☐ Jarek ma ponad połowę zabawek z piaskownicy

22. Trójkąt o polu 1 ma boki o długościach a, b, c, przy czym $a \geqslant b \geqslant c$. Czy b może być równe:

☐ $\frac{2\pi-1}{4}$
☐ $\frac{\pi^2}{6}$
☐ 541

23*. Przekątne czworokąta mają długości 5 i 12. Wówczas:

☐ jego pole może wynosić 29.
☐ może się on zmieścić w okręgu o promieniu $6\frac{1}{3}$.
☐ może być on trapezem.

24. Maciuś napisał bardzo dużą liczbę całkowitą n i przemnożył ją przez 5 uzyskując wynik składający się z 60 cyfr, przy czym jest to 40 piątek i 20 siódemek. Jeśli $S(x)$ jest sumą cyfr liczby x, to

☐ $S(S(S(n))) = 7$.
☐ $S(n) = 130$.
☐ $S(n) = 140$.

25. Liczba wszystkich wspólnych prostych stycznych do dwóch różnych okręgów może być równa dokładnie:

- [ ] 0.
- [ ] 1.
- [ ] 3.

26. Liczba $11 \cdot 13^2 \cdot 15^3 \cdot 17^4 \cdot 19^5$ ma

- [ ] 720 dzielników.
- [ ] 6! dzielników.
- [ ] ponad 2006 dzielników.

27. Suma dwóch liczb pierwszych

- [ ] dzieli się przez 3.
- [ ] musi być liczbą pierwszą.
- [ ] może być liczbą pierwszą.

28*. Czy długości boków trójkąta prostokątnego mogą być

- [ ] wszystkie liczbami pierwszymi.
- [ ] kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.
- [ ] liczbami całkowitymi oraz kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, przy czym najkrótszy bok ma długość niepodzielną przez 3.

29. Dla każdego $n > 2$ istnieje n-kąt mający:

- [ ] n osi symetrii.
- [ ] $n + 1$ osi symetrii, jeśli n parzyste.
- [ ] mający dwa różne środki symetrii, jeśli n jest nieparzyste.

30. W bandzie zbójników lorda Saicama niektórzy zbójnicy machają mieczem, niektórzy toporem a niektórzy nauczają języka polskiego (przy czym mogą robić po kilka rzeczy naraz, ale każdy robi przynajmniej jedną rzecz). W sumie w bandzie jest 227 zbójników. Machając mieczem nie uczy się polskiego. Pewną broń w ręku dzierży 127 zbójników. 67 ma topór i nie ma miecza. W sumie machających mieczem i uczących polskiego jest 160 zbójników.

- [ ] polonistów machających toporem i mieczem jest ponad 11.
- [ ] co najwyżej 4! polonistów macha toporem.
- [ ] możliwe, że 27 zbójników macha i mieczem i toporem.