

## Ciągi, teoria liczb i inne

1. Pokazać, że jeśli liczby  $a, b, c$  są wymierne, to liczba

$$\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}$$

jest kwadratem liczby wymiernej.

2. Pokazać, że liczba  $2^p + 3^p$  nie może być potęgą żadnej liczby naturalnej o wykładniku większym lub równym 2 gdy  $p$  jest pierwsze.

3. Liczbą Grabowskiego nazywamy liczbę składającą się z samych jedynek. Pokazać, że dla każdego  $n \perp 10$  istnieje liczba Grabowskiego podzielna przez  $n$ .

4. Pokazać, że dla  $x, y, z$  naturalnych zachodzi:

$$NWW(x, y) \cdot NWW(x, z) \cdot NWW(y, z) \geq (NWW(x, y, z))^2$$

5. Pokazać, że dla każdego naturalnego  $n$  istnieje wyraz ciągu Fibonacciego podzielny przez  $n$ .

6. Niech  $n$  i  $m$  będą liczbami naturalnymi. Pokazać, że jeśli  $n|m$  to  $f_n|f_m$ , gdzie  $f_i$  to  $i$ -ty wyraz ciągu Fibonacciego.

7. Joasia bawi się w sumowanki: najpierw pisze jakąś dużą liczbę, następnie obok jej sumę cyfr, obok sumy cyfr sumę cyfr sumy cyfr itd. aż dojdzie do liczby jednocyfrowej. Dziś Joasia napisała  $2005^{2005}$ . Jaką liczbę jednocyfrową otrzymała na koniec?

8. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej  $n$  istnieje taka liczba naturalna  $k$ , że suma:

$$n + (n + 1) + \dots + (n + k - 1)$$

jest kwadratem liczby naturalnej.