....
imie i nazwisko *klasa* *nr telefonu*

Test kwalifikacyjny na VIII Warsztaty Matematyczne

Klasa druga i trzecia

Na pytania odpowiada się „tak” lub „nie” poprzez wpisanie odpowiednio „**T**” bądź „**N**” w pole obok pytania. W danym trzypytaniowym zestawie możliwa jest dowolna kombinacja odpowiedzi „tak” i „nie”. W zestawach zaznaczonych gwiazdką (gwiazdka wygląda tak: *) prócz udzielenia odpowiedzi należy je uzasadnic.

Zasady punktacji:
Za pojedynczą poprawną odpowiedź: **1** punkt.
Za pojedynczą niepoprawną odpowiedź: −**1** punkt.
Za brak odpowiedzi: **0** punktów.
Za wszystkie poprawne odpowiedzi w jednym trzypytaniowym zestawie dodatkowe **2** punkty.
Za poprawne uzasadnienie pojedynczej odpowiedzi: **1** punkt.
Za niepoprawne uzasadnienie pojedynczej odpowiedzi badź brak takowego: **0** punktów.

Powodzenia!

1. Funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

☐ jeśli jest rosnąca i ciągła to jest „na” $\mathbb{R}$.
☐ jeśli jest rosnąca i „na” $\mathbb{R}$, to jest ciągła.
☐ jeśli jest ciągła i „na” $\mathbb{R}$, to jest rosnąca.

2. Ciąg a_n jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q. Ciąg b_n jest określony następująco:

$$b_n = a_{3n+2} + a_{3n+1} + a_{3n}$$

Wówczas b_n:

☐ jest ciągiem arytmetycznym.
☐ jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q.
☐ jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q^3.

3. W przestrzeni dane są trzy parami nierównoległe i nieprzecinające się proste. Możliwych prostych mających z każdą z nich co najmniej jeden punkt wspólny jest:

☐ zawsze 0.
☐ zawsze nieskończenie wiele.
☐ zależnie od wyboru prostych.

4. Liczba „dziewięćdziesiąt dziewięć tysięcy dziewięć” to:

- ☐ 99009.
- ☐ 93009.
- ☐ 99009.

5*. Układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + 1 = 2y \\ y^2 + 1 = 2z \\ z^2 + 1 = 2x \end{cases}$$

- ☐ nie ma rozwiązań w liczbach rzeczywistych.
- ☐ ma dokładnie jedno rozwiązanie w liczbach rzeczywistych.
- ☐ ma dokładnie jedno rozwiązanie w liczbach całkowitych

6. Liczba p jest pierwsza i większa od 2007. Wówczas liczba $p^2 - 1$ jest podzielna przez:

- ☐ 2.
- ☐ 12.
- ☐ 24.

7. W trójkącie ABC długość wysokości spuszczonej z wierzchołka C jest dwa razy mniejsza niż długość boku AB. Miara kąta $\angle ACB$ może być równa:

- ☐ 10°.
- ☐ 90°.
- ☐ 100°.

8. W zapisie dziesiętnym liczby 100! zerami są cyfry na pozycjach od prawej:

- ☐ $5, 10, 15$.
- ☐ $15, 20, 25$.
- ☐ $2, 4, 8$.

9. O liczbach x, y wiemy, że $3^x = 18$ oraz $18^y = 243$. Wówczas:

- ☐ $xy = 3\sqrt{2}$.
- ☐ $xy = 5$.
- ☐ $xy < 2\pi$

10. Jarek, Jędrek i Romek bawili się w piaskownicy. Każdy z nich albo zawsze kłamie, albo zawsze mówi prawdę. Jeden z nich ma łopatkę. W pewnym momencie powiedzieli nastepujące zdania:

Jarek: Właściciel łopatki zawsze kłamie.

Jędrek: Jarek zawsze mówi prawdę.

Romek: Jędrek nie ma łopatki.

Kto może mieć łopatkę?

- ☐ Jarek
- ☐ Jędrek
- ☐ Romek

11*. Niech $n = \overline{ABCDEF}$ będzie taką liczbą sześciocyfrową, że $A + D = B + E = C + F = 9$. Wówczas n jest podzielna przez:

- ☐ 9.
- ☐ 13.
- ☐ 37.

12. Suma kątów przy wierzchołkach gwiazdy $ACEGBDF$ wynosi:

(rysunek gwiazdy siedmioramiennej w której siedmiokąt $ABCDEFG$ jest wypukły)

- ☐ 360°.
- ☐ 630°.
- ☐ 720°.

13*. Sześciokąt wypukły może mieć:

- ☐ 3 kąty proste.
- ☐ 4 kąty proste.
- ☐ 3 kąty ostre.

14. Dziewięć punktów ułożono w kwadrat 3×3. Liczba możliwych trójkątów o wierzchołkach w tych punktach jest

- ☐ równa 78.
- ☐ mniejsza niż 80.
- ☐ większa niż 76.

15. Funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ spełnia dla każdego $x \in \mathbb{R}$ równania $f(10 + x) = f(10 - x)$ oraz $f(20 + x) = -f(20 - x)$. Wówczas f jest funkcją:

- ☐ okresową i parzystą.
- ☐ okresową i nieparzystą.
- ☐ parzystą i nieparzystą.

16*. Dany jest kwadrat o boku całkowitej długości a. Podzielono go na 36 kwadracików, z których 35 ma bok 1. Wówczas na pewno:

- ☐ $a = 6$.
- ☐ 3 dzieli a.
- ☐ pozostały kwadracik ma bok długości całkowitej.

17. Liczba równoległoboków, których wierzchołkami są wierzchołki 24-kąta foremnego jest:

- ☐ większa niż 100.
- ☐ mniejsza od 157.
- ☐ równa 66.

18. Maciek napisał na kartce:

`TATA BOKSUJE INTROLIGATORA`

Następnie przesunął w każdym wyrazie ostatnią literę na początek otrzymując:

`ATAT EBOKSUJ AINTROLIGATOR`

I następnie znów przesunął, i znów itd. Liczba przesunięć aż do pierwszego uzyskania pierwotnego tekstu:

- ☐ jest większa od 200.

- [ ] jest równa 2007.
- [ ] jest równa 364.

19. Wielomian $W(x)$ ma współczynniki całkowite oraz $W(7) = 6$. Wówczas:

- [ ] suma współczynników W dzieli się przez 6.
- [ ] możliwe, że W dzieli się przez $x - 2$.
- [ ] stopień tego wielomianu to co najmniej 2.

20*. Nadbor postanowił w wierzchołki n-kąta foremnego wpisać niezerowe liczby całkowite tak, by dla każdego wierzchołka liczba wpisana weń była sumą liczb wpisanych w sąsiednie wierzchołki. Może to zrobić dla:

- [ ] $n = 4$.
- [ ] $n = 5$.
- [ ] $n = 6$.

21. Wyrażenie $2a^2 + b^4 + 1 - 4ab$

- [ ] jest zawsze dodatnie.
- [ ] może być równe 1.
- [ ] jest zawsze większe od -1.

22. Niezerowe liczby rzeczywiste a, b, c sumują się do 0. Wówczas:

- [ ] $ab + bc + ac$ jest niedodatnie.
- [ ] możliwe, że $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$.
- [ ] abc jest dodatnie.

23. Onufry i Joasia grają w zapałki. Na początku na stole jest n zapałek. W każdym ruchu każde z nich musi zabrać ze stołu liczbę zapałek będącą potęgą 2. Joasia zaczyna, przegrywa ten, kto już nie może podnieść zapałki. Joasia ma strategię wygrywającą dla:

- [ ] $n = 101$.
- [ ] $n = 125$.
- [ ] $n = 234$.

24*. Która z poniższych liczb jest kwadratem liczby całkowitej:

- [ ] 6589436587643285638746598437598236875638742658723658736485638745687436535
- [ ] 73!

☐ 123321123321

25. Dla liczb rzeczywistych x, y, z zbiory $\{x, y, z\}$ i $\{2x + y, 2y + z, 2z + x\}$ są równe. Wówczas:

☐ $x + y + z = 0$.
☐ możliwe, że $xyz = 0$.
☐ $x^2 + y^2 + z^2$ jest zawsze dodatnie.

26. Klockiem nazywamy prostokąt 3×1 z doczepionym kwadracikiem 1×1 pośrodku dłuższego boku. Takim klockiem da się pokryć kwadrat:

☐ 4×4.
☐ 5×5.
☐ 10×10.

27. Liczba dzielników liczby $2^5 \cdot 3^4 \cdot 4^3 \cdot 5^2 \cdot 7^1$

☐ jest większa niż 700.
☐ jest mniejsza niż 500.
☐ jest parzysta.

28. Liczby a, b spełniają warunek:

$$\frac{a+b}{19a+94b} = \frac{1}{25}$$

Wówczas $\frac{a}{b}$

☐ może przyjmować więcej niż jedną wartość.
☐ jest równe $11,5$.
☐ jest równe $12,5$.

29. Prostokąt $EFGD$ powstał z prostokąta $ABCD$ przez obrót wokół wierzchołka D, przy czym obrazem punktu A jest punkt E, punktu B punkt F, a punktu C punkt G. Punkt H jest punktem przecięcia odcinków BC i EF. Wiadomo, że $AD = 8, AB = 12, BH = 7$. Wówczas pole pięciokąta $ABHED$

☐ jest równe 54.
☐ jest większe niż czworokąta $HCDE$.
☐ nie jest kwadratem liczby całkowitej.

30*. Liczba $6^{99} + 8^{99}$

- [ ] jest podzielna przez 4.
- [ ] jest podzielna przez 7.
- [ ] jest podzielna przez 49.