....

imie i nazwisko *klasa* *nr telefonu*

Test kwalifikacyjny na VI Warsztaty Matematyczne

Klasa druga i trzecia

Na pytania odpowiada się „tak” lub „nie” poprzez wpisanie odpowiednio „**T**” bądź „**N**” w pole obok pytania. W danym trzypytaniowym zestawie możliwa jest dowolna kombinacja odpowiedzi „tak” i „nie”. W zestawach zaznaczonych gwiazdką (gwiazdka wygląda tak: *) prócz udzielenia odpowiedzi należy je uzasadnic.

Zasady punktacji:

Za pojedynczą poprawną odpowiedź: **1** punkt.

Za pojedynczą niepoprawną odpowiedź: **−1** punkt.

Za brak odpowiedzi: **0** punktów.

Za wszystkie poprawne odpowiedzi w jednym trzypytaniowym zestawie dodatkowe **2** punkty.

Za poprawne uzasadnienie pojedynczej odpowiedzi: **1** punkt.

Za niepoprawne uzasadnienie pojedynczej odpowiedzi badź brak takowego: **0** punktów.

Powodzenia!

1. Ustawiamy w rządku 9 dziewczynek i 4 chłopców, tak aby żadnych dwóch chłopców nie stało obok siebie. Można tego dokonać na

☐ $\frac{10!\cdot 9!}{6!}$ sposobów.

☐ $9!\cdot 5040$ sposobów.

☐ $4!\cdot 2^{13}$ sposobów.

2. W pięciokącie foremnym $ABCDE$:

☐ miara kąta BAC jest większa od miary kąta CAD.

☐ miara kąta BAC jest mniejsza od miary kąta CAD.

☐ pole trójkąta BAC jest większe od pola trójkąta CAD.

3. Liczba $2^3\cdot 3^2\cdot 4^5\cdot 5^4\cdot 6^7\cdot 7^6$ ma dokładnie

☐ 6 dzielników pierwszych.

☐ 4320 dzielników.

☐ 2280 dzielników złożonych.

4*. W trójkacie prostokątnym ABC kąt przy wierzchołku C jest prosty, zaś $|AC| = 4$ i $|BC| = 3$. Niech M będzie środkiem boku AB, a D przecięciem dwusiecznej kąta C z prostą AB. Wówczas:

- [ ] $|CM| > |CD|$.
- [ ] $|CD| = \frac{12}{7}\sqrt{2}$
- [ ] Punkty A, M, D, B leżą, w tej właśnie kolejności, na prostej AB.

5. Onufry i Joasia mają po symetrycznej monecie. Onufry rzuca nią 2004 razy, a Joasia 2005 razy. Szansa, że

- [ ] Onufry wyrzuci więcej orłów niż reszek jest mniejsza niż 50%.
- [ ] Joasia wyrzuci więcej orłów niż reszek jest mniejsza niż 50%.
- [ ] Onufry wyrzuci nie więcej niż 501 orłów jest mniejsza niż 25%.

6. Niech n będzie dowolną liczbą całkowitą dodatnią. Rozważmy wielomian $W(x) = (x^2 - 2x - 1)^n$.

- [ ] Suma współczynników wielomianu W jest zawsze nieujemna.
- [ ] Dla $n > 1$ suma współczynników przy parzystych potęgach wielomianu W jest podzielna przez 8.
- [ ] Suma współczynników przy nieparzystych potęgach wielomianu zawsze jest ujemna.

7. Na płaszczyźnie dany jest trójkąt ABC. Zbiór punktów P takich, że pola trójkątów PAB, PBC, PCA są równe

- [ ] może być pusty.
- [ ] ma zawsze dokładnie 1 element.
- [ ] ma co najmniej 3 elementy.

8. Wojtek wypisuje ciągi złożone z cyfr 1, 2, 3 i 4 takie, że żadna uporządkowana para sąsiednich cyfr nie powtarza się. Wojtek może w ten sposób wypisać ciąg o długości:

- [ ] 16.
- [ ] 17.
- [ ] 18.

9. Rycerz walczy ze smokiem 2005^{2004} głowach. Jednym cięciem miecza może mu obciąć 14028 głów (wtedy żadna nie odrasta), 22 głowy (przy czym wtedy jedna odrasta) lub 9 głów (i odrasta 37). Rycerz może sprawić, że potworowi zostanie dokładnie

- [ ] zero głów
- [ ] jedna głowa.
- [ ] dwie głowy.

10*. Na płaszczyźnie dane są proste k,l,m, parami nierównoległe oraz punkt P leżący poza nimi. Niech P_k,P_l,P_m będą odpowiednio odbicami punktu P względem prostych k,l,m.

☐ Jeśli punkty P,P_k,P_l,P_m leżą na jednym okręgu, to proste k,l,m przecinają się w jednym punkcie.
☐ Jeśli proste k,l,m przecinają się w jednym punkcie, to punkty P,P_k,P_l,P_m leżą na jednym okręgu.
☐ Punkty P_k,P_l,P_m nie mogą leżeć na jednej prostej.

11. Ułamek $\frac{21n+55}{34n+89}$

☐ dla pewnego n całkowitego może być skrócony przez 2005.
☐ dla pewnego n całkowitego może być skrócony przez 7.
☐ zawsze jest nieskracalny.

12*. Dane są dwa ciągi arytmetyczne: $2, 9, 16, \ldots$ i $8, 13, 18, \ldots$. Wówczas:

☐ istnieje skończenie wiele liczb naturalnych występujących jednocześnie w obu ciągach.
☐ liczba $5^{2007} + 3$ występuje jednocześnie w obu ciągach.
☐ liczba $3^{809} + 11$ występuje jednocześnie w obu ciągach.

13. Dana jest liczba rzeczywista dodatnia a. Czy wartość wyrażenia $a(a^2+3) + \frac{1}{a}(\frac{1}{a^2} + 3) - 1$ jest zawsze:

☐ $\geqslant 2\pi$
☐ $\geqslant 7$
☐ > 7.

14*. Najkrótszą wysokością danego, niezdegenerowanego, trójkąta jest h. Wówczas

☐ żaden bok nie jest krótszy niż h.
☐ któryś bok może być równy h.
☐ najkrótsza środkowa jest nie mniejsza niż h.

15. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest parzysta, a funkcja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - nieparzysta i okresowa.

☐ Funkcja $f(g(x))$ jest nieparzysta.
☐ Funkcja $g(f(x))$ jest parzysta.
☐ Istnieje takie $a \in \mathbb{R}$, że $g(x + a)$ jest parzysta.

16. Sfera może mieć z krawędziami sześcianu dokładnie:

☐ 13 punktów wspólnych.
☐ 25 punktów wspólnych.
☐ 7 punktów wspólnych.

17. Joasia ma nową ulubioną grę! Teraz uwielbia grać z Onufrym w kulki, a jako że wyćwiczyła tę umiejętność do perfekcji, ogrywa go za każdym razem, więc ma więcej kulek od niego. Niestety, Onufry zapomniał ile ma kulek, więc zwrócił się do Joasi o pomoc. Ona zaś, pamiętając, że liczba kulek Onufrego dzieli się przez 7, przy dzieleniu przez 11 daje resztę 2 zaś przy dzieleniu przez 13 resztę 5, oraz znając swoją liczbę kulek, potrafiła podać dwie możliwe liczby kulek Onufrego. Joasia może mieć

☐ 1410 kulek.
☐ 2005 kulek.
☐ 2345 kulek.

18. W trójkąt ABC wpisano okrąg styczny do boków BC,AC,AB w punktach D,E,F. Następnie w trójkąt DEF wpisano okrąg styczny do boków EF,DF,DE odpowiednio w punktach G, H, I. Wówczas:

☐ trójkąty ABC i GHI są podobne.
☐ znając miarę kąta BAC można wyliczyć miarę kąta HGI.
☐ stosunek pól trójkątów ABC i GHI jest równy 16.

19*. Dany jest wielomian $W(x) = (x^2 + x^3)^{23}$. Współczynnik przy x^{54} jest:

☐ podzielny przez 7.
☐ podzielny przez 9.
☐ większy od 2^{11}.

20. Liczba $2006^{2004} - 4321^{234}$ jest podzielna przez:

- ☐ 5.
- ☐ 7.
- ☐ 9.

21. Każdy z grupy stu uczniów Staszica rzuca sześcienną kostką. Prawdopodobieństwo tego, że pewnych dziesięciu z nich uzyska ten sam wynik, wynosi:

- ☐ $\frac{100}{6^{10}}$.
- ☐ $\frac{1}{6!}$.
- ☐ $\frac{\binom{100}{10}}{6^{10}}$.

22. Rozpatrzmy następujący warunek: istnieje taki ciąg geometryczny (a_k), że liczby $a_1,...a_n$ są całkowite, a wszystkie dalsze wyrazy ciągu: a_{n+1}, a_{n+2},... nie są całkowite. Wówczas

- ☐ tylko liczba $n = 1$ spelnia ten warunek.
- ☐ nieskończenie wiele liczb całkowitych dodatnich nie spelnia tego warunku.
- ☐ każda dodatnia całkowita liczba n spełnia ten warunek.

23*. Na szachownicy $4n \times 4n$ da się ustawić tak, by się nie biły:

- ☐ $8n^2$ skoczków.
- ☐ $8n^2 + 1$ skoczków.
- ☐ $4n^2 + 1$ króli.

24. W Staszicu jest 112 dzielnych humanistów. Mają do przeczytania trzy książki: *Potop*, *Nad Niemnem* i *Ludzi bezdomnych*. 17 osób przeczytało tylko *Potop*, 35 - tylko *Ludzi bezdomnych*, a 27 - tylko *Nad Niemnem*. Dziewiętnastu humanistów przeczytało zarówno *Potop*, jak i *Ludzi bezdomnych* (być może niektórzy z nich przeczytali też *Nad Niemnem*).

- ☐ Jest możliwe, że *Potop* przeczytało co najmniej 70 osób.
- ☐ Jest możliwe, że nikt nie przeczytał wszystkich trzech książek.
- ☐ Jest możliwe, że *Nad Niemnem* przeczytało co najmniej 60 osób.

25. Wielomian $a^5 - a^4 - a^3 - a^2 + a + 1$ posiada:

- ☐ maksimum lokalne w przedziale $(-\frac{\pi}{4}, 1)$.
- ☐ minimum lokalne w przedziale $(1, 2)$.
- ☐ pięć różnyh pierwiastków rzeczywistych.

26. Grupka przyjaciół bawi się w lesie. Wiadomo, że w pewnej chwili Marcin stoi w odległości 665 kroków od Onufrego, 2191 kroków od Joasi oraz 760 kroków od Wojtka. Jednocześnie Karol jest o 2208 kroków od Wojtka, 2504 od Marcina i 313 kroków od Joasi. Jeśli od Wojtka do Onufrego jest 95 kroków, to odległość pomiędzy Joasią a Onufrym

- ☐ może być mniejsza niż 2005.
- ☐ musi być mniejsza niż 2005.
- ☐ musi być nie mniejsza niż 2005.

27. Liczba wszystkich rosnących ciągów siedemnastoelementowych o wyrazach należących do zbioru {1,2,...,2005} jest

- ☐ podzielna przez 1999.
- ☐ równa $\binom{2005}{17} \cdot 17!$.
- ☐ równa $\binom{2005}{1988}$

28*. Spośród wszystkich funkcji $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcja $f(x) = x$ jest jedyną funkcją, dla której dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$

- ☐ $f(x-y)f(x+y) = x^2 - y^2$.
- ☐ $f(x) + f(y) = f(x+y)$.
- ☐ $f(x)f(y) = f(xy)$.

29. Dane są liczby rzeczywiste a, b, c, d, takie, że zachodzi $ab = cd$. Wówczas, jeśli $a < c$, to:

- ☐ musi być $b > d$.
- ☐ jeśli a, b, c, d są całkowite i większe od 1, to b i c muszą mieć wspólny dzielnik.
- ☐ jeśli a, b, c, d są całkowite dodatnie, to z odcinków o długosciach a, b, c, d da się zbudowac czworokąt.

30. W trójkącie ostrokątnym ABC punkty D,E,F są spodkami wysokości poprowadzonych odpowiednio z wierzchołków A,B,C. Niech s będzie iloczynem długości boków trójkąta DEF zaś t iloczynem długości boków trójkąta ABC. Wówczas, jeśli oznaczymy przez $[XYZ]$ pole trójkąta XYZ, to:

- ☐ $\frac{[AEF][BDF][CDE]}{[ABC]^3} = \frac{s}{t}$
- ☐ $\frac{[AEF][BDF][CDE]}{[ABC]^3} = \frac{s^2}{t^2}$
- ☐ $\frac{s}{t} = \frac{1}{8}$