....

imie i nazwisko *klasa* *nr telefonu*

Test kwalifikacyjny na VI Warsztaty Matematyczne

Klasa pierwsza

Na pytania odpowiada się „tak” lub „nie” poprzez wpisanie odpowiednio „**T**” bądź „**N**” w pole obok pytania. W danym trzypytaniowym zestawie możliwa jest dowolna kombinacja odpowiedzi „tak” i „nie”. W zestawach zaznaczonych gwiazdką (gwiazdka wygląda tak: *) prócz udzielenia odpowiedzi należy je uzasadnic.

Zasady punktacji:
Za pojedynczą poprawną odpowiedź: **1** punkt.
Za pojedynczą niepoprawną odpowiedź: **−1** punkt.
Za brak odpowiedzi: **0** punktów.
Za wszystkie poprawne odpowiedzi w jednym trzypytaniowym zestawie dodatkowe **2** punkty.
Za poprawne uzasadnienie pojedynczej odpowiedzi: **1** punkt.
Za niepoprawne uzasadnienie pojedynczej odpowiedzi badź brak takowego: **0** punktów.

Powodzenia!

1. Liczba $2006^{2004} - 4321^{234}$ jest podzielna przez:

☐ 5.
☐ 7.
☐ 9.

2. Grupka przyjaciół bawi się w lesie. Wiadomo, że w pewnej chwili Marcin stoi w odległości 665 kroków od Onufrego, 2191 kroków od Joasi oraz 760 kroków od Wojtka. Jednocześnie Karol jest o 2208 kroków od Wojtka, 2504 od Marcina i 313 kroków od Joasi. Jeśli od Wojtka do Onufrego jest 95 kroków, to odległość pomiędzy Joasią a Onufrym

☐ może być mniejsza niż 2005.
☐ musi być mniejsza niż 2005.
☐ musi być nie mniejsza niż 2005.

3. Onufry ma w szufladzie 13 żółtych rękawiczek, 7 fioletowych i 8 pomarańczowych. Zamyka oczy i losuje n z nich. Wówczas jeśli wyciągnie

☐ co najmniej 16 rękawiczek, to ma pewność, że wyciągnął parę jednakowego koloru.
☐ co najmniej 25 rękawiczek, to ma pewność, że wyciągnął parę jednakowego koloru.
☐ co najwyżej 7 rękawiczek, to ma pewność, że nie wyciągnął pary jednakowego koloru.

4. Trawa na całym polu rośnie jednakowo gęsto i szybko. Jeżeli 60 krów ogołaca całe pole z trawy dokładnie w 24 dni, a 30 krów - dokładnie w 60 dni, to w dokładnie 100 dni całe pole zje

☐ 12 krów.
☐ 18 krów.
☐ 22 krowy.

5*. W pięciokącie $ABCDE$ wiadomo, że $CE||AB$ oraz $AD||BC$. Niech P będzie przecięciem przekątnych CE i AD. Oznaczmy przez $[XYZ]$ pole trójkąta XYZ. Wówczas:

☐ $[AEP] = [CDP]$.
☐ $[AEB] = [BCD]$.
☐ $[EPD] = [ABC]$.

6. Dane są liczby rzeczywiste a, b, c, d, takie, że zachodzi $ab = cd$. Wówczas, jeśli $a < c$, to:

☐ musi być $b > d$.
☐ jeśli a, b, c, d są całkowite i większe od 1, to b i c muszą mieć wspólny dzielnik.
☐ jeśli a, b, c, d są całkowite dodatnie, to z odcinków o długosciach a, b, c, d da się zbudowac czworokąt.

7. Rozpatrzmy następujący warunek: istnieje taki ciąg geometryczny (a_k), że liczby a_1,...a_n są całkowite, a wszystkie dalsze wyrazy ciągu: a_{n+1}, a_{n+2},... nie są całkowite. Wówczas

☐ tylko liczba $n = 1$ spelnia ten warunek.
☐ nieskończenie wiele liczb całkowitych dodatnich nie spelnia tego warunku.
☐ każda dodatnia całkowita liczba n spełnia ten warunek.

8. Onufry i Joasia mają po symetrycznej monecie. Onufry rzuca nią 2004 razy, a Joasia 2005 razy. Szansa, że

☐ Onufry wyrzuci więcej orłów niż reszek jest mniejsza niż 50%.
☐ Joasia wyrzuci więcej orłów niż reszek jest mniejsza niż 50%.
☐ Onufry wyrzuci nie wiĘcej niż 501 orłów jest mniejsza niż 25%.

9*. Czy dla każdej liczby naturalnej n po liczbie jej dzielników można stwierdzić, czy jest ona:

☐ liczbą pierwszą?
☐ kwadratem pewnej liczby naturalnej?
☐ sześcianem pewnej liczby naturalnej?

10. Wojtek wypisuje ciągi złożone z cyfr 1, 2, 3 i 4 takie, że żadna para sąsiednich cyfr nie powtarza się. Wojtek może w ten sposób wypisać ciąg o długości:

- ☐ 16.
- ☐ 17.
- ☐ 18.

11. Rycerz walczy ze smokiem 2005^{2004} głowach. Jednym cięciem miecza może mu obciąć 14028 głów (wtedy żadna nie odrasta), 22 głowy (przy czym wtedy jedna odrasta) lub 9 głów (i odrasta 37). Rycerz może sprawić, że potworowi zostanie dokładnie

- ☐ zero głów
- ☐ jedna głowa.
- ☐ dwie głowy.

12. W Staszicu jest 112 dzielnych humanistów. Mają do przeczytania trzy książki: *Potop*, *Nad Niemnem* i *Ludzi bezdomnych*. 17 osób przeczytało tylko *Potop*, 35 - tylko *Ludzi bezdomnych*, a 27 - tylko *Nad Niemnem*. Dziewiętnastu humanistów przeczytało zarówno *Potop*, jak i *Ludzi bezdomnych* (być może niektórzy z nich przeczytali też *Nad Niemnem*).

- ☐ Jest możliwe, że *Potop* przeczytało co najmniej 70 osób.
- ☐ Jest możliwe, że nikt nie przeczytał wszystkich trzech książek.
- ☐ Jest możliwe, że *Nad Niemnem* przeczytało co najmniej 60 osób.

13. Wielokąt wypukły, który ma 152 przekątne,

- ☐ ma 18 boków.
- ☐ ma 19 boków.
- ☐ nie istnieje.

14*. Na szachownicy $4n \times 4n$ da się ustawić tak, by się nie biły:

- ☐ $8n^2$ skoczków.
- ☐ $8n^2 + 1$ skoczków.
- ☐ $4n^2 + 1$ króli.

15. Na bokach AB i BC dziewięciokąta foremnego $ABCDEFGHI$ dobudowano trójkąt równoboczny ABK i sześciokąt foremny $BCSTUW$. Miara kąta KBW może być równa:

- ☐ 40°.

- [ ] 160°.
- [ ] 80°.

16. Dane są dwie liczby niewymierne p i q. Może być wymierną liczba

- [ ] $p - q$.
- [ ] $\sqrt{pq}$.
- [ ] $\sqrt[3]{p+q}$.

17*. Najkrótszą wysokością danego, niezdegenerowanego, trójkąta jest h. Wówczas

- [ ] żaden bok nie jest krótszy niż h.
- [ ] któryś bok może być równy h.
- [ ] najkrótsza środkowa jest nie mniejsza niż h.

18. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest parzysta, a funkcja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - nieparzysta i okresowa.

- [ ] Funkcja $f(g(x))$ jest nieparzysta.
- [ ] Funkcja $g(f(x))$ jest parzysta.
- [ ] Istnieje takie $a \in \mathbb{R}$, że $g(x+a)$ jest parzysta.

19. Sfera może mieć z krawędziami sześcianu dokładnie:

- [ ] 13 punktów wspólnych.
- [ ] 25 punktów wspólnych.
- [ ] 7 punktów wspólnych.

20. W pięciokącie foremnym $ABCDE$:

- [ ] miara kąta BAC jest większa od miary kąta CAD.
- [ ] miara kąta BAC jest mniejsza od miary kąta CAD.
- [ ] pole trójkąta BAC jest większe od pola trójkąta CAD.

21. Dana jest liczba rzeczywista dodatnia a. Czy wartość wyrażenia $a(a^2+3) + \frac{1}{a}(\frac{1}{a^2} + 3) - 1$ jest zawsze:

- [ ] $\geqslant 2\pi$
- [ ] $\geqslant 7$
- [ ] > 7.

22*. Rozcinamy płaszczyznę za pomocą n różnych prostych ($n \geqslant 2$). Czy możemy otrzymać

- ☐ n części?
- ☐ $3n-3$ części?
- ☐ $\frac{n(n+1)}{2}+1$ części?

23. Czy istnieje koło, gdzie wymiernymi są:

- ☐ obwód i pole?
- ☐ pole?
- ☐ obwód i długość promienia?

24. W trójkąt ABC wpisano okrąg styczny do boków BC,AC,AB w punktach D,E,F. Następnie w trójkąt DEF wpisano okrąg styczny do boków EF,DF,DE odpowiednio w punktach G, H, I. Wówczas:

- ☐ trójkąty ABC i GHI są podobne.
- ☐ znając miarę kąta BAC można wyliczyć miarę kąta HGI.
- ☐ stosunek pól trójkątów ABC i GHI jest równy 16.

25*. Dane są dwa ciągi arytmetyczne: $2, 9, 16, \ldots$ i $8, 13, 18, \ldots$. Wówczas:

- ☐ istnieje skończenie wiele liczb naturalnych występujących jednocześnie w obu ciągach.
- ☐ liczba $5^{2007}+3$ występuje jednocześnie w obu ciągach.
- ☐ liczba $3^{809}+11$ występuje jednocześnie w obu ciągach.

26. Liczba $2^3 \cdot 3^2 \cdot 4^5 \cdot 5^4 \cdot 6^7 \cdot 7^6$ ma dokładnie

- [ ] 6 dzielników pierwszych.
- [ ] 4320 dzielników.
- [ ] 2280 dzielników złożonych.

27. W trójkacie prostokątnym ABC kąt przy wierzchołku C jest prosty, zaś $|AC| = 4$ i $|BC| = 3$. Niech M będzie środkiem boku AB, a D przecięciem dwusiecznej kąta C z prostą AB. Wówczas:

- [ ] $|CM| > |CD|$.
- [ ] $|CD| = \frac{12}{7}\sqrt{2}$
- [ ] Punkty A, M, D, B leżą, w tej właśnie kolejności, na prostej AB.

28. Każdy z grupy stu uczniów Staszica rzuca sześcienną kostką. Prawdopodobieństwo tego, że pewnych dziesięciu z nich uzyska ten sam wynik, wynosi:

- [ ] $\frac{100}{6^{10}}$.
- [ ] $\frac{1}{6!}$.
- [ ] $\frac{1}{6^{10}}$.

29*. Spośród wszystkich funkcji $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcja $f(x) = x$ jest jedyną funkcją, dla której dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$

- [ ] $f(x - y)f(x + y) = x^2 - y^2$.
- [ ] $f(x) + f(y) = f(x + y)$.
- [ ] $f(x)f(y) = f(xy)$.

30. Funkcja $f(x) = \sin(\cos x)$ dla wszystkich rzeczywistych x

- [ ] ma największą wartość równą 1.
- [ ] jest okresowa.
- [ ] przyjmuje wartość 0 nieskończenie wiele razy.