

Nierówności i nie tylko

22.10.2009

1. Suma liczb rzeczywistych $a, b, c > \frac{3}{4}$ wynosi 1. Pokazać, że zachodzi nierówność:

$$\frac{a}{a^2 + 1} + \frac{b}{b^2 + 1} + \frac{c}{c^2 + 1} \leq \frac{9}{10}.$$

2. Dane są liczby dodatnie a_1, a_2, \dots, a_5 takie, że

$$\sum_{i=1}^5 \frac{1}{1 + a_i} = 1.$$

Wykazać, że spełniona jest nierówność:

$$\sum_{i=1}^5 \frac{a_i}{4 + a_i^2} \leq 1.$$

3. Okrąg o środku w O przechodzący przez punkty A i C przecina boki AB i CB trójkąta ABC ponownie w punktach odpowiednio K i L . Okrąg opisany na trójkącie ANC i okrąg opisany na trójkącie KBL przecinają się w dwóch różnych punktach B i M . Udowodnić, że $\angle BMO = 90^\circ$.

4. Dany jest wielomian $W \neq 0$ o współczynnikach rzeczywistych. Pokazać, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ wielomian $W(x) - x$ dzieli wielomian:

$$\underbrace{W(W(\dots(W(x))\dots))}_n - x.$$