

KÓŁECZKO PRZEDŚWIĄTECZNE (19.12.2007)

1. WSZYSTKIEGO NAJLEPSZEGO PRZEDŚWIĄTECZNIE!

2. Dane są przystające kwadraty: $ABCD$ i $PQRS$. Wykazać, że środki odcinków AP , BQ , CR , DS są wierzchołkami kwadratu lub leżą na jednej prostej.

3. Udowodnij, że dla każdego $a > 2$ istnieje nieskończenie wiele $n \in \mathbb{N}$, takich że $n|a^n - 1$.

4. Dany jest okrągły tor samochodowy, a w jego niektórych punktach znajdują się składy paliwa. We wszystkich składach jest w sumie tyle paliwa, ile zużywa samochód do przejechania całego toru. Udowodnić, że można tak wybrać jeden ze składów, aby samochód tankując po drodze przejechał cały tor (i nie zabrakło mu paliwa między składami).

5. Środkowe AD , BE i CF trójkąta ABC przecinają się w punkcie S . Na każdym z czworokątów $AFSE$ i $BDSF$ można opisać okrąg. Wykazać, że trójkąt ABC jest równoboczny.

6. Znaleźć wartości a i b , dla których $x^4 + ax_3 + bx_2 - 8x + 1$ jest kwadratem pewnego wielomianu.