Stare pierwsze etapy

1. Ciąg a_n zdefiniowany jest rekurencyjnie dla $k \geqslant 1$:

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{k+1} = a_k^2 - 2 \end{cases}$$

Pokazać, że dla każdego n naturalnego zachodzi:

$$a_{n+1} > 2\sqrt{3}a_1 a_2 \ldots a_n$$

2. Pokazać, że równanie $x^x = y^3 + z^3$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich x, y, z.

3. Liczby nieujemne a, b, c, p, q, r spełniają warunki:

$$a + b + c = p + q + r = 1, p, q, r \leqslant \frac{1}{2}$$

Pokazać, że zachodzi $8abc \leqslant pa + qb + rc$. Kiedy zachodzi równość?

4. W trójkącie równobocznym ABC prosta styczna do okręgu wpisanego przecina boki AB i AC odpowiednio w D i E. Pokazać, że $\frac{AD}{DB} + \frac{AE}{EC} = 1$.

5. W trójkącie ABC w którym $AB > AC$, punkt D jest środkiem odcinka BC zaś punkt E leży na boku AC. Niech P i Q będą rzutami odpowiednio punktów B i E na prostą AD. Pokazać, że $AD = PQ$ wtedy i tylko wtedy, gdy $BE = AC + AE$.

6. Znaleźć wszystkie rozwiązania w liczbach całkowitych równania $x^2(y-1)+y^2(x-1) = 1$.

7. Wewnątrz równoległościanu, którego krawędzie mają długości a, b, c umieszczono punkt P. Pokazać, że istnieje wierzchołek równoległościanu taki, że jego odległość od punktu P nie przekracza $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.