Nietrudne zadania z (bardzo) starych olimpiad

8.04.2009

1. Udowodnić, że wszystkie podzbiory zbioru skończonego można ustawić w ciąg, którego kolejne wyrazy różnią się jednym elementem (zbiory A i B różnią się jednym elementem, jeśli jeden ze zbiorów $A \backslash B$ oraz $B \backslash A$ jest pusty, a drugi – jednoelementowy).

2. W kwadracie $ABCD$ o boku 1 leży czworokąt wypukły o polu większym od $\frac{1}{2}$. Dowieść, że w tym czworokącie mieści się odcinek o długości $\frac{1}{2}$ równoległy do AB.

3. Niech W będzie wielomianem stopnia $n \geqslant 1$ o współczynnikach całkowitych. Dowieść, że jeżeli dla co najmniej $2n+1$ różnych wartości całkowitych liczba $|W(\ )|$ jest (w zależności od) liczbą pierwszą lub równą 1, to wielomian W nie jest iloczynem dwóch wielomianów stopnia dodatniego o współczynnikach całkowitych.

4. Na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC obrano odpowiednio punkty K, L, M w taki sposób, że odcinki AK, BL, CM przecinają się w punkcie S leżącym wewnątrz trójkąta ABC i $\frac{AS}{SK} = \frac{BS}{SL} = \frac{CS}{SM}$. Dowieść, że S jest środkiem ciężkości trójkąta ABC.

5. Pokazać, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ istnieje liczba o n cyfrach, podzielna przez 2^n i składająca się (w zapisie dziesiętnym) z samych jedynek i dwójek.

6. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ spełnione są zależności:

$$\angle ABD = \angle ACE, \quad \angle ACB = \angle ACD, \quad \angle ADC = \angle ADE, \quad \angle ADB = \angle AEC.$$

Odcinki BD i CE przecinają się w punkcie S. Pokazać, że proste AS i CD są prostopadłe.