KÓŁECZKO Z NIERÓWNOŚCI MIĘDZY ŚREDNIMI (26.03.2008)

1. $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$. Udowodnić, że

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_1} \geqslant n$$

2. $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Udowodnić, że

$$\frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \geqslant \frac{9}{a+b+c}$$

3. $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ oraz $a+b+c=1$. Udowodnić, że

$$\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1} \leqslant \sqrt{15}$$

4. $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ oraz $abc(a+b+c)=1$. Udowodnić, że

$$(a+b)(a+c) \geqslant 2$$

5. $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Wykazać, że

$$\frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c} \geqslant \frac{36}{a+b+c}$$

6. $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$ oraz $a^{2008}+b^{2008}+c^{2008}+d^{2008} = 2008$. Znaleźć największą możliwą wartość wyrażenia $a^{499}+b^{501}+c^{503}+d^{505}$.

7. $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Udowodnić nierówność Schura:

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leqslant abc$$