Lajtowe kółko na odprężenie

1. Dane są n elementowe ciągi liczb dodatnich a_i oraz b_i sumujące się do A i B odpowiednio. Pokazać, że:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i b_i}{a_i + b_i} \leqslant \frac{AB}{A+B}$$

2. Wielomian o współczynnikach całkowitych daje przy dzieleniu przez wielomian $x^2 - 12x + 11$ resztę $990x - 889$. Pokazać, że nie ma on pierwiastków całkowitych.

3. Pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n i pierwszej p liczba $n^{p^p} + p^p$ jest złożona.

4. Dany jest trapez równoramienny $ABCD$ w którym $BC \| AD$. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Punkt F leży na dwusiecznej kąta BDC i spełnia warunek $IF \perp BC$. Okrąg opisany na trójkącie CFD przecina prostą BC w punktach C i E. Wykazać, że trójkąt DEF jest równoramienny.

5. Pokazać, że dla $n > 1$ wielomian $x^n + 5x^{n-1} + 3$ nie rozkłada się na iloczyn dwóch niestałych wielomianów o współczynnikach całkowitych.

6. Rozstrzygnąć, czy istnieje nieskończony ciąg liczb naturalnych $a_1, a_2, a_3, \ldots$ spełniający równanie:

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+2}}$$

7. Pokazać, że liczba

$$\sum_{n=0}^{10^{10}} \binom{2 \cdot 10^{10}}{2n} 5^n$$

jest podzielne przez $2^{2 \cdot 10^{10} - 1}$.