Różności, głównie znowu geometria

1. Okrąg wpisany w trójkąt ABC styczny jest do jego boków w punktach K, L, M odpowiednio. Pokazać, że $4[KLM] \leqslant [ABC]$.

2. Znaleźć wszystkie x, y naturalne, że $x^2 + y$ i $x + y^2$ są kwadratami liczb naturalnych.

3. Pokazać, że dla każdego ciągu $(x_1, x_2, \ldots, x_{11})$ liczb całkowitych da się dobrać taki ciąg $(a_1, a_2, \ldots, a_{11})$ liczb ze zbioru $\{-1, 0, 1\}$, że $2005 | a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{11}x_{11}$.

4. Dwusieczna kąta przy wierzchołku A w trójkącie ABC przecina ponownie okrąg opisany na nim w D. Niech E,F będą rzutami punktów B,C odpowiednio na prostą AD. Pokazać, że $AD \leqslant BE + CF$.

5. Okręgi o_1, o_2 przecinają się w punktach M i N, zaś prosta k jest styczna do o_1 w A a do o_2 w B. Prosta l równoległa do AB przechodząca przez M przecina ponownie o_1 w C i o_2 w D. Proste AN i BN przecinają l odpowiednio w P i Q, zaś przecięcie prostych AC i BD to E. Pokazać, że $EP = EQ$.

6. Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisywalny w okrąg i taki, że istnieje okrąg o środku na boku AB styczny do pozostałych boków tego czworokąta. Pokazać, że $AB = BC + DA$.

7.Pokazać, że dla dowolnych $m, n \in \mathbb{Z}^+$ liczba $\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ jest całkowita.