RPA

1. Znaleźć wszytskie x, y całkowite dla których $1 + 3^x = 2^y$.

2. Punkty A, B, C, D, E, F leżą w tej kolejności na okręgu γ, przy czym proste AD, BE, CF przecinają się wjednym punkcie. Punkty P, Q, R są środkami odcinków AD, BE, CF odpowiednio. W okręgu poprowadzono cięciwy AG i AH tak, by $AG \| BE$ oraz $AH \| CF$. Pokazać, że trójkąty DGH i PQR są podobne.

3. Dwusieczna kąta BAD w równoległoboku $ABCD$ przecina proste CD i BC odpowiednio w K i L. Pokazać, że środek okręgu opisanego na trójkącie CKL leży na okręgu opisanym na trójkącie BCD.

4. Ciąg L_i określony jest następująco:

$$L_1 = 1, L_2 = 3, L_n = L_{n-1} + L_{n-2},$$

dla $n > 2$. Pokazać, że dla każdej liczby pierwszej p zachodzi $p | L_p - 1$.

5. Pokazać, że w czworokącie wypukłym $ABCD$ o obwodzie p zachodzi:

$$\frac{p}{2} < AC + BD < p$$

6. O liczbie rzeczywistej x wiemy, że wszystkie różnice pomiędzy liczbami $x^{1919}, x^{1960}, x^{2001}$ są całkowite. Pokazać, że x jest całkowita.

7. Iloczyn liczb dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n$ wynosi 1. Pokazać, że istnieje takie $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ dla którego zachodzi:

$$\frac{x_k}{k + x_1 + x_2 + \ldots + x_k} \geqslant 1 - \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$$

8. In 'n gegewe vyfhoek $ABCDE$ het die driehoeke ABC, BCD, CDE, DEA en EAB almal dieselfde area. Die lyne AC en AD sny BE in die punte M en N. Bewys dat $BM = EN$.