

Różne

25.03.2009

1. Prosta p jest nachylona do płaszczyzny ω pod kątem 45° i przebija tę płaszczyznę w punkcie A . Prosta q leży w płaszczyźnie ω , przechodzi przez punkt A i tworzy z rzutem prostokątnym prostej p na płaszczyznę ω kąt 45° . Pokazać, że proste p i q tworzą kąt 60° .

2. Udowodnij, że liczby rzeczywiste a, b, c o iloczynie 1 spełniają tożsamość:

$$\frac{1}{1+a+ab} + \frac{1}{1+b+bc} + \frac{1}{1+c+ca} = 1.$$

3. W tablicy $2n \times 2n$ zamalowano $3n$ pól. Pokazać, że można wybrać n wierszy i n kolumn tak, żeby wszystkie zamalowane pola znalazły się w wybranych wierszach i kolumnach.

4. Wykaż, że dla dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c o iloczynie 1 zachodzi nierówność:

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} \geq \frac{3}{4}.$$

5. Pokazać, że dla liczb $a, b, c \in (0; 1)$ o sumie 2 zachodzi nierówność:

$$\frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} \geq 8.$$

6. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Pokazać, że środek okręgu opisanego na trójkącie BCI leży na prostej AI .