Równania funkcyjne

4.02.2009

1. Znaleźć wszystkie funkcje $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniające dla każdych $x,y\in\mathbb{R}$:

$$f(x+y)=f(f(x))+y+1.$$

2. Znaleźć wszystkie funkcje $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniające dla każdego $x\in\mathbb{R}$ warunki:

(i) $f(x)\leqslant x$;

(ii) $f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)$.

3. Znaleźć wszystkie funkcje $f:\mathbb{R}\setminus\{0,1\}\to\mathbb{R}$, takie że dla każdego $x\in\mathbb{R}$:

$$f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=x.$$

4. Dane są funkcje f – parzysta, g – nieparzysta, $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ oraz ustalone $c\in\mathbb{R}$. Dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość:

$$g(x)=f(x+c).$$

Udowodnić, że f jest okresowa.

5. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y zachodzi równość:

$$f\left(f(x)-y\right)=f(x)+f\left(f(y)-f(-x)\right)+x.$$

6. Znaleźć wszystkie monotoniczne funkcje $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, takie że dla każdych $x,y\in\mathbb{R}$:

$$f(x)+f(y)=f(x+y).$$