

Zadania łatwe, ale nie wszystkie ;)

1. W kwadracie $ABCD$ punkt N leży na przekątnej BD . Pokazać, że punkty A, N oraz środki okręgów opisanych na trójkątach ABN i ADN tworzą wierzchołki kwadratu.

2. Pokazać, że dla x, y, z rzeczywistych zachodzi:

$$x^4 + y^4 + z^4 \geq \sqrt{8}xyz$$

3. Znaleźć wszystkie liczby całkowite dodatnie n , by liczba $1! + 2! + 3! + \dots + n!$ była kwadratem liczby całkowitej.

4. Wyznaczyć wszystkie trójki liczb pierwszych $p \leq q \leq r$, by liczby:

$$pq + r, pq + r^2, pr + q, pr + q^2, qr + p, qr + p^2$$

były też pierwsze.

5. Trójkąt ABC , w którym $\angle BAC = 90^\circ$ jest podstawą ostrosłupa $ABCD$. Ponadto zachodzą równości $AD = BD$ oraz $AB = CD$. Pokazać, że $\angle ACD \geq 30^\circ$.

6. Wyznaczyć wszystkie takie liczby naturalne n , że dla dowolnych liczb dodatnich $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ zachodzi:

$$x_1x_2 \dots x_n + y_1y_2 \dots y_n \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \cdot \dots \cdot \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$$

7. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich a, b , że $a^b = b^{2a}$.