Definicja 1. Równaniami funkcyjnymi *nazwiemy równania nieznanych funkcji.*

Aby znaleźć rozwiązania równania funkcyjnego, często:

- podstawiamy wartości pod zmienne (np. $x = y$, $x = 0$)
- badamy lub wykorzystujemy monotoniczność funkcji
- badamy lub wykorzystujemy ciągłość funkcji
- badamy lub wykorzystujemy ograniczoność funkcji
- badamy lub wykorzystujemy okresowość funkcji
- definiujemy nową funkcję na podstawie badanych i badamy jej własności

1. Zbadaj własności funkcji opisanych równaniami Couchy'ego:
    - $f(xy) = f(x) + f(y)$
    - $f(x + y) = f(x) + f(y)$
    - $f(x + y) = f(x)f(y)$
    - $f(xy) = f(x)f(y)$
2. Znajdź wszystkie funkcje f spełniające równanie Jensena: $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$ dla każdego $x, y \in \mathbb{R}$.
3. Znajdź jakieś (wszystkie) funkcje f takie, że $f(x) = f(\frac{x}{2})$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.
4. Znajdź wszystkie ciągłe rozwiązania $f(x + y) = g(x) + h(y)$ dla $x, y \in \mathbb{R}$.
5. Udowodnij, że f jest okresowa, jeśli dla pewnej stałej a dla dowolnego x zachodzi $f(x + a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$.
6. Znajdź wszystkie wielomiany p spełniające równanie $p(x + 1) = p(x) + 2x + 1$.
7. Znajdź wszystkie funkcje f spełniające dla każdego $x, y \in \mathbb{R}$ równanie $xf(x)+yf(x) = (x + y)f(x)f(y)$.
8. Znajdź wszystkie niezerowe funkcje f spełniające dla każdego $x, y \in \mathbb{R}$ równanie $f(x)f(y) = f(x - y)$.
9. Znajdź wszystkie *rozsądne* (ciągłe lub ograniczone na przedziale lub monotoniczne) funkcje f spełniające $f(x + y) + f(x - y) = 2[f(x) + f(y)]$ dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.
10. Znajdź wszystkie *rozsądne* funkcje f spełniające $f(x + y) - f(x - y) = 2f(y)$ dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.
11. Znajdź wszystkie *rozsądne* funkcje f spełniające $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)$ dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.
12. Znajdź wszystkie *rozsądne* funkcje f spełniające $f(x + y) = \frac{f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}$ dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.
13. Znajdź wszystkie funkcje f spełniające równanie $f(x) + f(\frac{1}{1-x}) = x$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}, x \neq 0, 1$.
14. Znajdź wszystkie ciągłe funkcje f spełniające równanie $f(x+y) = f(x)+f(y)+xy(x+y)$ dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.