Środek masy

Uwaga. Wszystko poniżej dotyczy płaszczyzny euklidesowej z prostokątnym układem współrzędnych. Utożsamiamy punkty z ich wektorami wodzącymi (np. $A = \vec{A} = \vec{OA}$), co pozwala nam dodawać punkty i mnożyć je przez liczby rzeczywiste.

Definicja. *Masą punktową* nazywamy parę (m, P), gdzie P jest punktem, a m dowolną liczbą rzeczywistą, zwaną "masą" (zatem dopuszczamy również ujemne masy).
Definicja. Niech $V = \{(m_1, P_1), \dots, (m_n, P_n)\}$ będzie zbiorem (*układem*) mas punktowych. Przez M_V oznaczamy masę tego układu (czyli $M_V = \sum m_i$). Jeśli $M_V \neq 0$, *środkiem masy* układu V nazywamy punkt (wektor)

$$G_V = \frac{\sum m_i \cdot P_i}{M_V},$$

Twierdzenie 0. $G_{U+V} = \frac{M_U \cdot G_U + M_V \cdot G_V}{M_U + M_V}$ (przez $U + V$ rozumiemy połączenie dwóch układów) .
Twierdzenie 1. Stosunek, w jakim środek masy dwóch mas dodatnich zaczepionych w punktach A i B dzieli odcinek AB, jest równy stosunkowi tych mas.

Punkty szczególne trójkąta jako środki masy. Niech ABC będzie dowolnym trójkątem. Wówczas:
1. Środek ciężkości $\triangle ABC$ to środek masy układu $\{(1, A), (1, B), (1, C)\}$. *Wniosek*: dzieli on środkowe w stosunku 2 : 1.
2. Środek okręgu wpisanego w $\triangle ABC$ to środek masy układu $\{(a, A), (b, B), (c, C)\}$.
3. Ortocentrum $\triangle ABC$ to środek masy układu $\{(\operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma, A), (\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \gamma, B), (\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta, C)\}$.
4. Środek okręgu opisanego na $\triangle ABC$ to środek masy układu $\{(\sin 2\alpha, A), (\sin 2\beta, B), (\sin 2\gamma, C)\}$.

Zadania

Zadanie 1 (Tw. Čevy). Dany trójkąt ABC oraz punkty X, Y, Z leżące na bokach odpowiednio BC, CA, AB. Wykazać, że proste AX, BY, CZ mają punkt wspólny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{AZ}{BZ} \cdot \frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} = 1.$$

Zadanie 2 (Tw. Van Aubela). Dany trójkąt ABC oraz punkty X, Y, Z leżące na bokach odpowiednio BC, CA, AB. Proste AX, BY, CZ przecinają się w punkcie M. Wykazać, że $\frac{AM}{MX} = \frac{AY}{YC} + \frac{AZ}{ZB}$.

Zadanie 3. Założenia jw., pokazać, że $\frac{AM}{MX} \cdot \frac{BM}{MY} \cdot \frac{CM}{MZ} \geqslant 8$.

Zadanie 4. Niech H będzie ortocentrum trójkąta ABC wpisanego w okrąg o środku w O. Wykazać, że pola pewnych dwóch z trzech trójkątów OHA, OHB, OHC sumują się do pola trzeciego.

Zadanie 5. Na każdym polu szachownicy 2000×2000 leży kamyk. Ruch polega na przesunięciu dwóch kamyków leżących na polach oddalonych o 2 (w jednej kolumnie lub rzędzie) na pole pomiędzy nimi (na jednym polu może leżeć dowolna liczba kamieni). Czy można tak wybrać kolejność ruchów, aby wszystkie kamyki znalazły się na jednym polu?

Zadanie 6. Znaleźć środek masy *obwodu* trójkąta.

Moment bezwładności i twierdzenie Steinera

Definicja. *Momentem bezwładności* układu V względem punktu (*osi*) X nazywamy liczbę

$$I_X(V) = \sum m_i \cdot |XP_i|^2.$$

Twierdzenie Steinera. Dla dowolnego układu V posiadającego środek masy ($M_V \neq 0$) i dowolnej osi X zachodzi

$$I_X(V) = I_{G_V}(V) + M_V |XG_V|^2.$$

Wniosek. Jeśli masa układu jest dodatnia, moment bezwładności jest najmniejszy względem środka masy.

Zadania

Zadanie 7. W danym trójkącie ABC znaleźć taki punkt X, by suma $AX^2 + BX^2 + CX^2$ była najmniejsza.

Zadanie 8. Punkt P leży na okręgu opisanym na trójkącie równobocznym ABC. Wykazać, że suma $AP^2 + BP^2 + CP^2$ nie zależy od wyboru punktu P.

Zadanie 9. Punkt P leży na okręgu wpisanym w trójkąt ABC. Wykazać, że suma $AP^2 BC + BP^2 AC + CP^2 AB$ nie zależy od wyboru punktu P.

Zadanie 10. M jest środkiem ciężkości trójkąta ABC. Wykazać, że

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(MA^2 + MB^2 + MC^2).$$

Zadanie 11. Czy w grę z zadania 5. można grać w nieskończoność?