Oto dwa niefirmowe rozwiązania zadań z pięciogodzinówki:

Zadanie 2 / dzień 3: Punkty A, P, Q, R i S leżą na okręgu w tej właśnie kolejności, przy czym

$$\angle PAQ = \angle QAR = \angle RAS.$$

Wykazać, że

$$AR(AP + AR) = AQ(AQ + AS).$$

Równość z tezy zadania zapiszę tak:

$$\frac{AP}{AQ} + \frac{AR}{AQ} = \frac{AQ}{AR} + \frac{AS}{AR}.$$

Teraz stosunki odcinków wyrażam z tw. sinusów przez ilorazy sinusów. Oznaczam: wpisany oparty na $PQ = QR = RS$ to będzie α, zaś wpisany oparty na AS to β. Pamiętam też, że $\sin x = \sin(\pi - x)$. Dla przykładu:
$AP : AQ = \sin\angle AQP : \sin\angle APQ = \sin(\pi - 3\alpha - \beta) : \sin(2\alpha + \beta) = \sin(3\alpha + \beta) : \sin(2\alpha + \beta)$.
Po podstawieniu wszystkiego, równość zadania wygląda tak:

$$\frac{\sin(3\alpha + \beta)}{\sin(2\alpha + \beta)} + \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(2\alpha + \beta)} = \frac{\sin(2\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} + \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Mogę sobie podstawić $\gamma = \alpha + \beta$, wtedy znikną potrojone kąty. To już jest prosta tożsamość trygonometryczna (wiem, bo przeliczyłem =).

Zadanie 3 / dzień 3: Wykazać, że dla dowolnych rzeczywistych dodatnich x, y, z zachodzi:

$$\frac{xyz}{x^3 + y^3 + xyz} + \frac{xyz}{y^3 + z^3 + xyz} + \frac{xyz}{z^3 + x^3 + xyz} \leqslant 1.$$

Zaczynam tak, jak w "firmowym" rozwiązaniu: w każdym składniku sumy po lewej stronie dzielę licznik i mianownik przez xyz oraz podstawiam:

$$a = \frac{x^2}{yz}, \quad b = \frac{y^2}{zx}, \quad c = \frac{z^2}{xy}.$$

Nasze zadanie przyjmuje więc postać: wykazać, że dla dowolnych dodatnich a, b, c takich, że $abc = 1$ zachodzi nierówność:

$$\frac{1}{1 + a + b} + \frac{1}{1 + b + c} + \frac{1}{1 + c + a} \leqslant 1.$$

Teraz podstawiam $A = \ln a$, $B = \ln b$, $C = \ln c$ i mam $A + B + C = 0$ oraz

$$\frac{1}{1 + e^A + e^B} + \frac{1}{1 + e^B + e^C} + \frac{1}{1 + e^C + e^A} \leqslant 1.$$

Niech $\varphi(x, y) = \frac{1}{1+e^x+e^y}$. Sprawdzamy łatwo, że

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} < 0,$$

nasza funkcja jest zatem wklęsła. Toteż, z uogólnionej nierówności Jensena otrzymujemy:

$$L = \varphi(A, B) + \varphi(B, C) + \varphi(C, A) \leqslant 3 \cdot \varphi\left(\frac{A + B + C}{3}, \frac{A + B + C}{3}\right) = 3 \cdot \varphi(0, 0) = 1 = P.$$

O uogólnionej nierówności Jensena przeczytacie w broszurce z *LII Olimpiady Matematycznej*, którą znajdziecie na stronie www.om.edu.pl w dziale "zadania".