Kółeczko na prima aprilis

Prima aprilis;)

Prima

Suma nieujemnych liczb rzeczywistych a, b, c jest niewiększa od 3. Pokazać, że zachodzi nierówność:

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Secunda

Ciąg (a_n) określony jest następująco: $a_1 = 1$ oraz $a_n = a_1 a_2 ... a_{n-1} + 1$ dla $n \geqslant 2$. Znaleźć najmniejszą możliwą liczbę rzeczywistą M, dla której nierówność:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{a_i} < M$$

spełniona jest dla każdego $m \in \mathbb{N}$.

Tertia

Pokazać, że istnieje taki zbiór 2009 liczb naturalnych, że suma wszystkich elementów dowolnego podzbioru tego zbioru nie jest potęgą liczby naturalnej.

Quarta

Suma nieujemnych liczb rzeczywistych $a_1,\ a_2, \ldots a_n$ wynosi 1. Udowodnij, że:

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2} + \frac{a_2^2}{a_2+a_3} + \ldots + \frac{a_n^2}{a_n+a_1} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Quinta

Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC = BC$. Punkt D jest środkiem boku AB, a punkt E jest rzutem prostokątnym punktu D na prostą BC. Punkt M jest środkiem odcinka DE. Dowieść, że proste AE i CM są prostopadłe.

Sexta

Czy istnieje czworościan foremny, którego wszystkie wierzchołki znajdują się w punktach o współrzędnych całkowitych?