Powtórzenie

11.03.2009

1. Dane są liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$. Udowodnij, że istnieje taki niezerowy ciąg $(x_1, x_2, \ldots, x_{11})$ o wyrazach ze zbioru $\quad 1, 0, 1$, że liczba

$$\sum_{i=1}^{11} a_i x_i$$

jest podzielna przez 2009.

2. P jest takim wielomianem o współczynnikach całkowitych, że zarówno równanie $P(x) = 1$, jak i $P(x) = 3$ ma co najmniej jedno rozwiązanie całkowite. Rozstrzygnij, czy równanie $P(x) = 2$ może mieć dwa różne rozwiązania całkowite.

3. Znaleźć wszystkie takie funkcje $f : \mathbb{R} \quad \to \mathbb{R}$, że dla każdego $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$f(x^3) + f(y^3) = (x + y)(f(x^2) + f(y^2) \qquad f(xy)).$$

4. Pokazać, że dla nieujemnych liczb a, b, c, d takich, że $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ zachodzi:

$$a^2b^2cd + a^2bc^2d + a^2bcd^2 + ab^2c^2d + ab^2cd^2 + abc^2d^2 \leqslant \frac{3}{32}.$$

5. Na zewnątrz trójkąta ostrokątnego ABC zbudowano kwadraty $ABPQ$ i $ACRS$ o środkach odpowiednio w X i Y. Pokazać, że okręgi opisane na trójkątach ACQ, ABS i AXY przecinają się w jednym punkcie różnym od A.

6. Czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem, a trójkąty ACM i BDN są równoboczne. Pokazać, że prosta MN jest prostopadła do któregoś z boków czworokąta $ABCD$.

7. Okrąg ω wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA i AB odpowiednio w punktach K, L, M. P jest takim punktem na ω, że MP jest średnicą okręgu ω. Proste KP i ML przecinają się w punkcie Q. Pokazać, że $CQ = CL$.