Pięciogodzinówka przed drugim etapem - wersja 2

Dzień 1

1. Znaleźć wszystkie ciągi liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots a_{2006}$, spełniające układ nierówności:

$$\begin{cases} 2\sqrt{a_1 - 0} \geqslant a_2 - 0 \\ 2\sqrt{a_2 - 1} \geqslant a_3 - 1 \\ 2\sqrt{a_3 - 2} \geqslant a_4 - 2 \\ \vdots \\ 2\sqrt{a_{2005} - 2004} \geqslant a_{2006} - 2004 \\ 2\sqrt{a_{2006} - 2005} \geqslant a_1 + 1 \end{cases}$$

2. Na płaszczyźnie dany jest trójkąt ABC. Okrąg γ jest styczny do boków AB i AC odpowiednio w punktach D i E oraz przecina bok BC w punktach K i L, przy czym K leży bliżej B niż C. Pokazać, że jeśli P jest punktem przecięcia przekątnych czworokąta $DKLE$, to prosta AP jest prostopadła do prostej BC wtedy i tylko wtedy, gdy odcinek KL jest średnicą okręgu γ.

3. W księstwie Hofmańskim istnieje n miast połączonych dwukierunkowymi drogami, przy czym z każdego miasta wychodzą co najmniej 3 drogi. Pokazać, że książe Hofman jest w stanie wyjechać z pewnego miasta i wrócić do niego nie przejeżdżając żadnej z krawędzi więcej niż raz i zwiedzając parzystą liczbę miast (łącznie z początkowym).